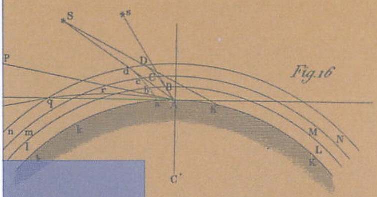
ミンコフスキー空間と特殊相対性

有馬 哲●ほか著

数学的には，
特殊相対性理論とは
線型代数学の応用にすぎない。
特殊相対性理論の舞台は
4次元のミンコフスキー空間である。
すなわちアフィン空間であって，
その平行移動の全体は
ミンコフスキー内積という
特別な内積をもつ
4次元の線型空間である。
本書では，
交代テンソルの話を含む
線型代数学を精一杯用い，
ミンコフスキー空間，
特に世界線について
詳しく述べた。
ローレンツ・ブーストを
厳密に扱ったのも，
本書の特徴である。
数学者はもちろん，
物理学者にも一読を，
お願いする。



ミンコフスキー空間と特殊相対性

有馬 哲●ほか著

東京図書

有馬桃子と扶佐子へ

本書は刊行にあたり，早稲田大学学術出版補助費
の助成をうけたものである．

まえがき

本書は，数学者から見た，特殊相対性理論の舞台であるMinkowski空間についての，理工系学部または大学院初年級の学生向けの，教科書であり独習書である．有馬・浅枝［4］の続編であって，［4］と共に早稲田大学において行った講義のノートを整理したものである（［　］内は，本書巻末参考文献の番号を表す）．著者たちの計画する四部作

I　電磁気学……［4］

II　Minkowski空間論……本書

III　特殊相対性理論……［5］近刊

IV　一般相対性理論……未完

の第II部である．予備知識として［4］を仮定する．［4］で擬ベクトル，アフィン空間上のベクトル場・テンソル場を学んだのを受けて，特殊相対性理論の舞台であるMinkowski空間特にその上の世界線について学び，特殊相対性の仮説と光の速度不変の仮説にふれて終わる．

純粋数学としての特殊相対性理論入門

または純粋数学としての

Minkowski空間と世界線の幾何学

と言うべきものであろう．講義のノートで1回分がおよそ1つの§に当る．「本書の特徴」を読んで欲しい．

参考文献の中で，物理学については砂川［8］を，数学については田村［9］，Parrott［12］，前原［13］，Weyl［17］を特に参考にした．砂川［8］と田村［9］の影響が中でも大きい．私は約30年前に相対性理論を勉強しようとしてさっぱり分からなかったのを憶えている．その後［9］のあとがきを読むに及んで悟る所があった．Newtonの第I法則と慣性系に関連して［9］は

(1) 互いに等速運動を行うすべての慣性系を包含する空間は何か

(2) 電流を考えるとき，電流の速度とは何か

と設問している．私が躓いたのも，このあたりが曖昧模糊として分からなくなって行ったのが，始まりであったように思う．

本書の原稿は1986年にはほぼ出来ていたのであるが，実際に本にするとなると補足したいことが沢山現れ，意外に遅くなった．その代わりに途中から日高文夫・米田元，最後には城一明の参加をえて内容は格段に充実したものとなったので寧ろ遅れて良かったということになる．

初めの予定では文献［5］と本書とあわせて『Minkowski空間と特殊相対性理論』となるはずであったが意外に長くなってしまったので，このように2冊となった．

IV　一般相対性理論

の原稿はほんの概略があるに過ぎない．

なお最後に，米田元による部分を列記しておこう．

(i)　(1.2.10) の証明の簡単化

(ii)　(2.3.6) の証明の簡単化

(iii)　(2.5.8) の結果の予想と証明である．また，石上嘉康先生は始めのうちは，随分活躍され，中でも劣光速世界線 X の時空速度の慣性時刻標示

$$V_{(O,e)}(x) := \frac{X_{(O,e)}{}'(x)}{\|X_{(O,e)}{}'(x)\|_T}$$

は秀逸でしたが，離散数学の方に興味を持たれ，著者から降りて仕舞われたのは残念なことでした．Lorentz Boost（第3章の主要な部分）は石上先生の工夫によるものです．その外先生の工夫によるものも随分あります．

謝辞：早稲田大学の学生石上嘉康氏にまず感謝いたします．学習院大学の江沢洋先生には文献を教えて頂いたり色々とお世話になりました．早稲田大学の並木美喜雄先生には早稲田大学研究助成基金のために推薦文をいただきました．早稲田大学の清水義之先生にはLorentz変換について教わることがありました．早稲田大学の大場一郎先生には極めて初等的な質問で悩ませたり，教

わることがありました．また藤井喜崇氏等，早稲田大学の学生諸君は講義を聴いたり，アイデアを提供したり，間違いを指摘したりしてくれました．編集部の須藤静雄氏，田沢直樹氏には普通の編集業務の枠を超えて何回も書き直した原稿の管理，著者達の間の連絡など，沢山お世話になりました．記して感謝の意を表します．

最後に有馬扶佐子は脳性小児麻痺の娘桃子の世話を一手に引き受けて私の勉強の時間を作って呉れました．感謝の意を表します．

有馬　哲

1993（平成５）年３月11日

論　理　記　号

記号 ∀ は**全称記号**と呼ばれ，すべてのまたは任意の（any）を意味する．記号 ∃ は**存在記号**とよばれ，存在する（exist）を意味する．$\exists_1$ とはただ1つ存在することを意味する．また

$$A := B \quad \text{とか} \quad B =: A$$

はいずれも「B のことを A で表す」とか「B により A を定義する」を意味する．

例　写像 $f: X \to Y$ に対し，

（i）　f が**全射**である ⇔「$\forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ y = f(x)$」

⇔「任意の $y \in Y$ に対し，ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ が成り立つ」

⇔ $f(X) = Y$

（ii）　f が**単射**である ⇔「$\forall x_1, x_2 \in X,\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$」

⇔「任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ が成り立つ」

（iii）　「$\forall P, Q \in \boldsymbol{A},\ \exists_1 \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^m{}_A,\ Q = P + \boldsymbol{a}$」

⇔「任意の $P, Q \in \boldsymbol{A}$ に対し，$Q = P + \boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^m{}_A$ がただ1つ存在する」

MKS 有理単位系

基本単位は	
長さ	M＝メートル
質量	K＝キログラム
時間	S＝秒
温度	K°＝ケルビン≒273＋(摂氏の温度)

速度	MS^{-1}
加速度	MS^{-2}
力	N＝ニュートン＝$K\cdot MS^{-2}=MKS^{-2}$
エネルギー	J＝ジュール＝$N\cdot M=M^2KS^{-2}$
仕事率	W＝ワット＝$J/S=M^2KS^{-3}$
周波数	Hz＝ヘルツ＝S^{-1}
圧力	Pa＝パスカル＝$N/M^2=M^{-1}KS^{-2}$

真空における電磁波の速さは定値

$$c \fallingdotseq 3\times 10^8 \quad MS^{-1}$$

であることが認められている (4.2.2)．そこで相対性理論においては，時間の単位としてS＝秒ではなく，新しい時間の単位 M＝**メートル**を，定数 c を用いて

$$1\,メートル := 1/c\,秒 = (電磁波が1メートルを走るに要する時間)$$

$$すなわち\quad 1\,M=(1/c)S$$

と定める．

$$x\,メートル = t\,秒 \quad \Leftrightarrow \quad x=ct$$

本 書 の 特 徴

次の【１】から【10】の点に本書の特徴があるように思う．

【１】 交代テンソルの話を含む線型代数学を精一杯用いた．線型代数学の理解なしに特殊相対性理論を理解するのは所詮は無理なことであると私は思う．ここに線型代数学とは，成分表示を用いないテンソル解析のことである．数学的には，特殊相対性理論とは線型代数学の応用に過ぎないと言えなくもない．すなわち

(古典物理学) = (Newton 力学) ∪ (Maxwell の電磁気学)

(古典物理学) ⊇ (ポテンシャル論)

(特殊相対性理論) = (古典物理学) ∪ (Einstein の解釈) ∪ (線型代数学)

と見ることができるが，私は線型代数学の部分が未だ完全には消化されていないと思う．

【２】 特殊相対性理論の舞台は 4 次元の Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M)$ である．すなわち $\boldsymbol{M}$ は 4 次元アフィン空間であって，その平行移動の全体 $\boldsymbol{V}_M$ は 4 次元の線型空間で Minkowski 内積という符号が (3, 1) の特別な内積

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M, \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_M$$

を持つものである (1. 1. 2)．そこで Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M)$ はアフィン空間として数学的に扱った．すなわち

（i） **定義** 集合 $\boldsymbol{A}$ と m 次元の線型空間 $\boldsymbol{V}^m{}_A$ の組

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V}^m{}_A)$$

が m 次元のアフィン空間であるとは，次の公理を満たすことである．

公理 (0. 0. 1) 平行移動の公理

(1) ∀ ベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^m{}_A$ に対し，写像 $f_a : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ が定まる．f_a をベクトル $\boldsymbol{a}$ が定める**平行移動**という．

(2) $\forall P, Q \in \boldsymbol{A}$ に対し，$\exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^m{}_A$

$$f_{a}(P)=Q$$

が成り立つ．このような $\boldsymbol{a}$ はただ1つである．

(3)　$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$ に対し，合成写像 $f_{b} \circ f_{a}$ は f_{a+b} と一致する．

$$f_{b} \circ f_{a}=f_{a+b} \qquad \text{(公理終)}$$

記号（0.0.2）　$P \in \boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$ に対し，$f_{a}(P)$ を $P+\boldsymbol{a}$ で表す．

$$f_{a}(P)=: P+\boldsymbol{a}$$

系（0.0.3）　記号 $P+\boldsymbol{a}$ を用いると平行移動の公理は次のように表される．

(1)　写像：$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V}^{m}{}_{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$，$(P, \boldsymbol{a}) \mapsto P+\boldsymbol{a}$ がある．

(2)　$\forall P, Q \in \boldsymbol{A}$，$\exists_{1} \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$，$Q=P+\boldsymbol{a}$ である．この $\boldsymbol{a}$ を $\overrightarrow{PQ}$ で表す．

$$Q=P+\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}=: \overrightarrow{PQ}$$

(3)　$\forall P \in \boldsymbol{A}$，$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$

$$(P+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=P+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

系（0.0.4）　(i)　$\forall P, Q, R \in \boldsymbol{A}$，

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$$

(ii)　$\forall P \in \boldsymbol{A}$，$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$

$$(P+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=(P+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}$$

(iii)　零ベクトル $\boldsymbol{o} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$ に対し，$f_{o}=$（恒等写像）

$$\forall P \in \boldsymbol{A}, \qquad P+\boldsymbol{o}=P$$

逆に，ベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$ に対し，

$$\exists P \in \boldsymbol{A},\ P+\boldsymbol{a}=P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$$

(iv)　$\forall P, Q \in \boldsymbol{A}$，$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^{m}{}_{A}$ に対し

$$Q=P+\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad Q+(-\boldsymbol{a})=P$$

すなわち

$$-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP}$$

証明　[4] の (3.1.3)，(3.1.4) 参照．

【3】　<u>慣性系は本書の一大特徴</u>である．単位未来ベクトルの全体を

$$T^{\downarrow}_{U}:=\{\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{V}_{M} \mid \boldsymbol{e} \text{ は未来ベクトル}, \langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e} \rangle_{M}=-1\}$$

で表す．位置 $O \in \boldsymbol{M}$ とベクトル $\boldsymbol{e} \in T^{\downarrow}_{U}$ との組 $(O, \boldsymbol{e})$ を<u>慣性系</u>または<u>観測者</u>という．$(O, \boldsymbol{e})$ における慣性時刻の全体

$$\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) := O + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}$$

は一次元の Euclid 空間をなす．時刻 $O+t\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})$ を t と略記する．$\boldsymbol{e}$ と直交するベクトル全体を $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ で表す．

$$\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) := \{\boldsymbol{e}\}\perp = \{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}_M \mid \langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{e}\rangle_M = 0\}$$

$(O,\boldsymbol{e})\in\boldsymbol{M}\times T_U^{\downarrow}$ とする．このとき

$$\boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{e}) := O + \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \text{ は三次元の Euclid 空間}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}), \quad \boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\times\boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{e})$$

となる．一点 $O\in\boldsymbol{M}$ を定めたとき全単射（上への 1 対 1 の写像）

$$\boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{V}_M, \qquad X\mapsto\overrightarrow{OX}, \qquad O+\boldsymbol{x}\leftarrow\!\dashv\boldsymbol{x}$$

が定まる．

$\forall X\in\boldsymbol{M}$ に対し，ベクトル $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}\in\boldsymbol{V}_M=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ は

$$\boldsymbol{x} = ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)} = (ct, \boldsymbol{x}_{(O,e)}), \qquad \boldsymbol{x}_{(O,e)}\perp\boldsymbol{e} \qquad \cdots①$$

と表されるから，

$$X = O + \boldsymbol{x} \qquad \cdots②$$

は

$$X = O + ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}, \qquad \boldsymbol{x}_{(O,e)}\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \qquad \cdots③$$

と表される．普通はさらに $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ の正規直行基底列 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を定め，

$$\boldsymbol{x}_{(O,e)} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

のとき

$$X = O + ct\boldsymbol{e} + x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \qquad \cdots④$$

または

$$(ct, x_1, x_2, x_3)\in\boldsymbol{R}_4 \qquad \cdots⑤$$

と表すことがある．5 通りの全単射により

$$\boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{V}_M, \qquad X\leftrightarrow OX=\boldsymbol{x}, \qquad \cdots②$$

$$\boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{V}_M, \qquad X=O+ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}\leftrightarrow OX=ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)} \qquad \cdots①$$

$$\boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\oplus\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}), \qquad X\leftrightarrow(ct, \boldsymbol{x}_{(O,e)}) \qquad \cdots①$$

$$\boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{V}_M, \qquad X\leftrightarrow OX=ct\boldsymbol{e}+x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3 \qquad \cdots④$$

$$\boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{R}_4, \qquad X\leftrightarrow(ct, x_1, x_2, x_3) \qquad \cdots⑤$$

と表される．もっとくわしく Minkowski 空間の同型写像

$$(\boldsymbol{M}^4, \boldsymbol{V}_M)\cong(\boldsymbol{V}_M, \boldsymbol{V}_M)\cong(\boldsymbol{R}_4, \boldsymbol{R}_4)$$

が得られる．この事実をベクトル解析の基本定理という．このことがあるので，空間 $\boldsymbol{M}$ の点をベクトル空間 $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{M}}$ の元または 4 次元数ベクトル⑤で表しても差支えなく，普通は⑤を用いるが，①②③の方が簡明でより幾何学的で分かり易い．本書では原則として，③を用いる．

【4】 世界線 X の慣性時刻表示 $X_{(O,e)}$ と固有時刻表示 $X_P(\tau_P)$ の扱いは本書の特徴の 2 つ目である．すなわち Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{M}})$ において

定義と補題　集合 $X \subseteqq \boldsymbol{M}$ が劣光速世界線

$$\Leftrightarrow \exists/\forall \text{ 慣性系 } (O, \boldsymbol{e}),\ \exists C^\infty \text{ 級の写像 } X_{(O,c\boldsymbol{e})} : \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{M}$$

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_{(O,c\boldsymbol{e})}$

(2)　$\forall t \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})$，$X_{(O,c\boldsymbol{e})}'(t)$ は未来ベクトル，

特に　$\langle X_{(O,c\boldsymbol{e})}'(t) \mid X_{(O,c\boldsymbol{e})}'(t) \rangle_M < 0$

(3)　$\forall t \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})$，$\langle \boldsymbol{e} \mid OX_{(O,c\boldsymbol{e})}(t) \rangle_M = -ct$」

が成り立つ．写像 $X_{(O,c\boldsymbol{e})}$ を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における X の慣性時刻表示という．

$\Leftrightarrow \forall P \in X$，$\boldsymbol{R} \supseteqq \exists_1$ 開区間 $I_P \ni 0$，$\exists_1 C^\infty$ 級の写像 $X_P : I_P \to \boldsymbol{M}$，

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_P$

(2)　$\forall \tau_P = \tau \in I_P$，$X_P'(\tau) \in cT_U^\uparrow$

特に　$\langle X_P'(\tau) \mid X_P'(\tau) \rangle_M = -c^2$

(3)　$X_P(0) = P$

(4)　$\forall \boldsymbol{e} \in T_U^\uparrow$，$\forall G \in \boldsymbol{R}$，$\exists \tau \in I_P$，$\exists \boldsymbol{x}^S \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$，

$$X_P(\tau) = P + cG\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S \text{」}$$

が成り立つ．写像 X_P を位置 P を基準点とする X の固有時刻表示という．以下簡単のために $I_P = \boldsymbol{R}$ とする．異なる基準点 $P \in X$，$R \in X$ の固有時刻 τ_P，τ_R は加法定数を除いて一致する．すなわち，

$$\forall P \in X,\ \forall R \in X,\ \exists \alpha \in \boldsymbol{R},\ \tau_R = \tau_P + \alpha$$

【5】 $\forall$ 劣光速世界線 X について，$\forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$

$$X_{(O,c\boldsymbol{e})}(t) = O + ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(t)$$

のとき

$$\boldsymbol{v}_{(O,e)}(t) := \boldsymbol{x}_{(O,e)}'(t) = \frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dt}(t) \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

を X の慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における空間速度という．慣性速度ともいう．

$$\beta_{(O,e)}(t) := \|\boldsymbol{v}_{(O,e)}(t)/c\|_S < 1$$

$$\gamma_{(O,e)}(t) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}} = \frac{c}{\|X_{(O,ce)}'(t)\|_T} \geqq 1 \qquad \cdots①$$

と置く．

$$T_{(O,e)}(t) := \frac{1}{c}\int_0^t \|X_{(O,ce)}'(s)\|_T\, ds \qquad \cdots②$$

と置く．関数 $\gamma_{(O,e)}(t)$ や $T_{(O,e)}(t)$ は X に依存する．

$$T_{(O,e)}'(t) = \frac{\|X_{(O,ce)}'(t)\|_T}{c}$$

である．

劣光速世界線 X に対し，$\forall$ 慣性系 $(P, \boldsymbol{e}) \in X \times T_U^{\downarrow} \subseteqq \boldsymbol{M} \times T_U^{\downarrow}$

（i） 写像 $T_{(P,e)} : \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{R}$ は全単射 $X_P^{-1} \circ X_{(P,ce)}$ に一致する．

（ii） $\tau_0 = T_{(P,e)}(t_0)$ のとき，

$$\frac{dt}{d\tau}(\tau_0) = \frac{1}{\dfrac{d\tau}{dt}(t_0)} = \frac{c}{\|X_{(P,ce)}'(t)\|_T} = \gamma_{(P,e)}(t_0) \qquad \cdots③$$

が成り立つ．

【6】 4元速度を，固有時刻ではなく，$\forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ を定めたとき慣性時刻 $t \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})$ の関数として表す．すなわち

定義と補題 （i） 劣光速世界線 $X = \mathrm{Im}\, X_P$，ただし $P \in X$，$\forall R = X_P(\tau_P) \in X$ に対し，

$$\boldsymbol{V}(R) = \boldsymbol{V}(\tau_P) := X_P'(\tau_P) \in cT_U^{\downarrow} \subseteqq \boldsymbol{V}_M$$

を位置 R における X の時空速度または4元速度という．固有時刻 τ_P における時空速度ともいう．この値は，基準点 P の取り方に依存しなくて，位置 R のみに依存する．

$$cT_U^{\downarrow} := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_M \mid \boldsymbol{x} \text{ は未来ベクトル，} \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M = -c^2\}$$

（ii） $\forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{M} \times T_U^{\downarrow}$ に対し，

$$\boldsymbol{V}_{(O,ce)}(t) := c\frac{X_{(O,ce)}{}'(t)}{\|X_{(O,ce)}{}'(t)\|_T} \in cT^{\uparrow}_U$$

を慣性時刻 $t \in \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{e})$ における X の時空速度という．$O \in X$ を仮定しないことに注意する．

(iii) 慣性時刻 $t \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ に対し，$R = X_{(O,ce)}(t) \in X$ のとき，$\boldsymbol{V}_{(O,ce)}(t)$ は $\boldsymbol{V}(R)$ に一致する．

$$\boldsymbol{V}_{(O,ce)}(t) := \boldsymbol{V}(R)$$

が成り立つ．すなわち

$$\forall t \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}), \qquad \boldsymbol{V}_{(O,ce)}(t) := \boldsymbol{V}(X_{(O,ce)}(t))$$

これにより，時空運動量の保存の法則と超慣性系性を厳密に定式化しかつ証明することができた．

【7】 Lorentz boost を厳密に扱った．ある直線に沿っての Lorentz boost が作る群の話 (1.6.11) は普通扱われているほどは簡単な話ではないように思う．

なお，本書は［4］の続編であるから［4］の知識を仮定する．当然［4］と同じく：

【8】 Euclid 空間や Minkowski 空間の点を表すのに，座標を全く用いない．関数や写像の微分係数も座標を用いないで Frechet 式に定義したものである．ベクトルもテンソルも座標を用いないで定義する．ベクトルの成分表示もほとんど用いない．

【9】 すでに【3】と【8】で述べたように，Euclid 空間や Minkowski 空間の点（位置）をベクトルで表すことをしない．点はベクトルとは別のものであるのに，込みにして同じもので表しては混乱するからである．特定の時空位置を始点とする位置ベクトルにより空間の位置を表すことは，相対性理論においては特に，具合が悪いように思う．

【10】 本書でも，関数や写像の微分可能性についてはほとんど言及しない．現れる関数や写像はすべて連続であり微分可能，正確には C^∞ 級と仮定する．

近年数学と物理学の関係は緊密になったとされるが，それでもなお，両者の間の隔絶は大きい．数学者はほとんど物理学を解しない．本書が両者の橋渡しとなることを祈っている．

目　次

装幀　戸田ツトム＋岡孝治

第0章　テンソル

この章では，用語と記号の確認をかねて，有馬・浅枝［4］のテンソルに関する部分を復習する．さらに，線型写像の外積 $f \wedge g$，混合テンソル，縮約写像 c_s^r について補充する．本章の参考文献：

［4］　有馬・浅枝：ベクトル場と電磁場

［15］　横沼：テンソル空間と外積代数

［7］　Greub：Multilinear Algebra

§0.1　アフィン線型空間 (A, V_A)

有限次元の線型空間に関することは既知とする．

定義　集合 V が次の公理 (0.1.1) を満たすことを，V は**線型空間**であるという．ここに $\boldsymbol{R}$ は実数の全体を表す．

公理 (0.1.1) (**線型空間の公理**)

公理 I (**加法の公理**) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し，**和** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ が定まり

(1)　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　　(2)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(3)　$\exists \boldsymbol{o} \in V$，$\forall \boldsymbol{a} \in V$，$\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$

(4)　$\forall \boldsymbol{a} \in V$，$\exists -\boldsymbol{a} \in V$，$(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}$

公理 II (**実数倍の公理**) $\forall \boldsymbol{a} \in V$，$\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し，λ **倍** $\lambda \boldsymbol{a} \in V$ が定まり

(5)　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}$　　(6)　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{a}+\mu \boldsymbol{a}$

(7)　$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu \boldsymbol{a})$　　(8)　$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，ただし $\mu \in \boldsymbol{R}$

有限次元の線型空間を**アフィン線型空間**ともいう．

定義と命題 (0.1.2) V を線型空間，$W \subseteqq V$ を部分集合とする．

(i)　W が，V と同じ演算によって線型空間となるとき，W を V の**部分線型空間**という．簡単に**部分空間**ともいう．

(ii)　部分集合 W が次の3つの条件を満たすとき，W は部分空間となる．

(0)　$W \neq \emptyset$

(1)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$

(2)　$\boldsymbol{a} \in W,\ \lambda \in \boldsymbol{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda \boldsymbol{a} \in W$

V, W が線型空間のとき，写像 $f: V \to W$ が線型写像であるとは

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R},\ f(\lambda \boldsymbol{x}+\mu \boldsymbol{y})=\lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つことである．

定義と命題（0.1.3）（i）S を集合，W を線型空間とするとき，S から W への写像の全体 $Map(S, W)$ は

$\forall f, g \in Map(S, W)$，$\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し，和 $f+g$ と実数倍 λf を

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x), \qquad (\lambda f)(x):=\lambda(f(x))$$

により定義すれば，線型空間をなす．

（ii）　V と W を線型空間とする．このとき，V から W への線型写像の全体を

$$Lin(V, W)$$

で表す．$Lin(V, W)$ は V から W への写像全体 $Map(V, W)$ の部分空間である．これを V から W への**線型写像空間**という．

（iii）　特に $V=\boldsymbol{R}$ のとき，$Lin(\boldsymbol{R}, W) \cong W$

$$f \mapsto f(1), \qquad (x \mapsto x\boldsymbol{w}) \leftarrow\!\shortmid \boldsymbol{w}$$

定義（0.1.4）　V を線型空間とする．

（i）　$V^*:=Lin(V, \boldsymbol{R})$ を V の**双対**（そうつい）**線型空間**という．簡単に**双対空間**ともいう．

（ii）　$n=\dim V \geqq 1$ とする．V の基底列 $(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ に対し，$f^i \in V^*$ を条件

$$f^i(\boldsymbol{b}_j)=\delta^i_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

により定める $(1 \leqq i \leqq n)$．このとき，列 $(f^1, \cdots, f^n)$ は V^* の基底列である．これを基底列 $(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ の**双対基底列**という．

定理（0.1.5）　線型空間 V が有限次元のとき，双対空間 V^* の双対空間 $(V^*)^*=Lin(V^*, \boldsymbol{R})$ は自然な仕方で V と同一視できる．すなわち

（i）　$\boldsymbol{a} \in V$ に対し，写像 $\nu(\boldsymbol{a}): V^* \to \boldsymbol{R}$，$f \mapsto f(\boldsymbol{a})$ を考えると，$\nu(\boldsymbol{a})$ は線型写像である．すなわち $\nu(\boldsymbol{a}) \in (V^*)^*$ である．

（ii）　$\nu: V \to (V^*)^*$, $\boldsymbol{a} \mapsto \nu(\boldsymbol{a})$ は同型写像である.

証明　[4], (1.1.10) 参照.

命題　(0.1.6)　有限次元の線型空間 V において，基底列 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ から基底列 $\boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_n'$ への変換行列を

$$T=(a^i{}_j)_{1\leqq i,j\leqq n}=\begin{bmatrix} a^1{}_1 & \cdots & a^1{}_j & \cdots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i{}_1 & \cdots & a^i{}_j & \cdots & a^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & \cdots & a^n{}_j & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix}, \qquad T^{-1}=(b^i{}_j)_{1\leqq i,j\leqq n}$$

とする.

$$(\boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_n')=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\,T$$

$$\boldsymbol{a}'_j=\sum_{1\leqq i\leqq n}\boldsymbol{a}_i a^i{}_j$$

（i）　$V\ni \boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{a}_n=x'^1\boldsymbol{a}_1'+\cdots+x'^n\boldsymbol{a}_n'$ とすれば

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{bmatrix}=T^{-1}\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad (x'^1, \cdots, x'^n)=(x^1, \cdots, x^n)\,{}^tT^{-1}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{a}'_j=\sum_{1\leqq i\leqq n}\boldsymbol{a}_i a^i{}_j \quad \Rightarrow \quad x'^j=\sum_{1\leqq i\leqq n}b^j{}_i\,x^i$$

（ii）　$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の双対基底列を $f^1, \cdots, f^n\in V^*$，$\boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_n'$ の双対基底列を $f'^1, \cdots, f'^n\in V^*$ とするとき，

$$(f'^1, \cdots, f'^n)=(f^1, \cdots, f^n)\,{}^tT^{-1}$$

であり，

$$V^*\ni\xi=\lambda_1 f^1+\cdots+\lambda_n f^n=\lambda_1' f'^1+\cdots+\lambda_n' f'^n$$

とすれば

$$\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{bmatrix}={}^tT\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad (\lambda_1', \cdots, \lambda_n')=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\,T$$

が成り立つ．そこで，V を定めたとき，V^* の元を**共変ベクトル**，V の元を**反変ベクトル**という.

証明　[4], (1.1.12) 参照.

命題 (0.1.7) $\boldsymbol{R}^* = Lin(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}$

$$f \mapsto f(1)$$
$$(x \mapsto ax) \leftarrow\!\shortmid a$$

証明 $Lin(\boldsymbol{R}, W) \cong W$, $f \mapsto f(1)$ において (0.1.3) の (iii), $W = \boldsymbol{R}$ と置けばよい. (証明終)

定義 (0.1.8) V, W, U を線型空間とする.

(i) 直積集合 $V \times W$ から U への写像 $\Phi: V \times W \to U$ が2つの条件

$$\forall \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V, \ \forall \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in W, \ \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R},$$
$$\Phi(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \mu \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_0) = \lambda \Phi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_0) + \mu \Phi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_0)$$
$$\Phi(\boldsymbol{x}_0, \lambda \boldsymbol{y}_1 + \mu \boldsymbol{y}_2) = \lambda \Phi(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_1) + \mu \Phi(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_2)$$

を満たすとき, 言い換えれば, $\forall \boldsymbol{y}_0 \in W$ を定めたとき, 写像 $V \to U$, $\boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)$ が線型写像であり $\forall \boldsymbol{x}_0 \in V$ を定めたとき, 写像 $W \to U$, $\boldsymbol{y} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y})$ が線型写像であるとき, Φ は**双線型写像**であるという.

(ii) 双線型写像 $V \times W \to U$ の全体を $Bilin(V \times W, U)$ で表す. $\Phi, \Psi \in Bilin(V \times W, U)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し, **和** $\Phi + \Psi$ と **λ 倍** $\lambda\Phi$ を

$$(\Phi + \Psi)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$
$$(\lambda\Phi)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \lambda\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

により定義する. これにより $Bilin(V \times W, U)$ は線型空間となる.

命題 (0.1.9) 線型空間 V, W, U が共に有限次元のとき,

$$\dim Bilin(V \times W, U) = (\dim V)(\dim W)(\dim U)$$

である. 特に

$$\dim Bilin(V \times W, \boldsymbol{R}) = (\dim V)(\dim W)$$

証明 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ を V の基底列, $(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$ を W の基底列, $(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k)$ を U の基底列とする. $1 \leqq v \leqq n$, $1 \leqq w \leqq m$, $1 \leqq u \leqq k$ に対し, 写像 $\Phi_{vwu}: V \times W \to U$ を

$$\Phi_{vwu}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j) = \delta_{(v,w)(i,j)} \boldsymbol{u}_u = \begin{cases} \boldsymbol{u}_u & (i = v, j = w) \\ \boldsymbol{o} & (\text{その他}) \end{cases}$$

すなわち

$$\Phi_{vwu}\Big(\sum_{1\le i\le n} x^i \boldsymbol{v}_i,\ \sum_{1\le j\le m} y^j \boldsymbol{w}_j\Big)=\sum_{i,j} x^i y^j \Phi_{vwu}(\boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{w}_j)$$
$$=x^v y^w \boldsymbol{u}_u$$

により定義する．当然 $\Phi_{vwu}\in Bilin(V\times W, U)$ である．

$(\Phi_{vwu})_{1\le v\le n, 1\le w\le m, 1\le u\le k}$ は一次独立：実際，$\sum a_{vwu}\Phi_{vwu}=0$ $(a_{vwu}\in \boldsymbol{R})$ ならば，任意の i, j に対し

$$\boldsymbol{o}=(\sum a_{vwu}\Phi_{vwu})(\boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{w}_j)=\sum_{1\le u\le k} a_{iju}\boldsymbol{u}_u$$
$$\therefore\quad \forall u,\ a_{iju}=0$$
$$\therefore\quad a_{iju}=0\quad (\forall i, j, u)$$

$(\Phi_{vwu})_{1\le v\le n, 1\le w\le m, 1\le u\le k}$ は $Bilin(V\times W, U)$ を生成する：実際，$\forall \Phi\in Bilin(V\times W, U)$ に対して，$\sum_{1\le u\le k} a_{vwu}\boldsymbol{u}_u := \Phi(\boldsymbol{v}_v,\ \boldsymbol{w}_w)$ と置けば

$$\Phi\Big(\sum_{1\le i\le n} x^i \boldsymbol{v}_i,\ \sum_{1\le j\le m} y^j \boldsymbol{w}_j\Big)=\sum_{i,j} x^i y^j \Phi(\boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{w}_j)=\sum_{i,j,u} x^i y^j a_{iju}\boldsymbol{u}_u$$
$$=\sum_{i,j,u} a_{iju}\Phi_{iju}\Big(\sum_{1\le i'\le n} x^{i'}\boldsymbol{v}_{i'},\ \sum_{1\le j'\le m} y^{j'}\boldsymbol{w}_{j'}\Big)$$
$$\therefore\quad \Phi=\sum_{i,j,u} a_{iju}\Phi_{iju}$$

以上により $(\Phi_{vwu})_{1\le v\le n, 1\le w\le m, 1\le u\le k}$ は $Bilin(V\times W, U)$ の基底である．

(証明終)

例 (0.1.10)　有限次元の線型空間 V において，同型写像 $\nu: V\cong V^{**}$ は (0.1.5)，双対空間の概念に内在して，自然に定まるものである．そこで，以下 $\boldsymbol{x}\in V$ と $\nu(\boldsymbol{x})\in V^{**}$ とを同一視する．すなわち

$$V=V^{**},\quad \boldsymbol{x}=\nu(\boldsymbol{x}),\quad f(\boldsymbol{x})=:\boldsymbol{x}(f)\quad (\boldsymbol{x}\in V,\ f\in V^*)$$

と見る．$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}(f)$ を $\langle f|\boldsymbol{x}\rangle_D$ で表す．

$$\langle f|\boldsymbol{x}\rangle_D := f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}(f)$$

このとき，$f\in Lin(V, \boldsymbol{R})$ の線型性と $\boldsymbol{x}=\nu(\boldsymbol{x})\in V=V^{**}$ の線型性はそれぞれ

$$\langle f|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle_D=\langle f|\boldsymbol{x}\rangle_D+\langle f|\boldsymbol{y}\rangle_D,\qquad \langle f|\lambda\boldsymbol{x}\rangle_D=\lambda\langle f|\boldsymbol{x}\rangle_D$$
$$\langle f+g|\boldsymbol{x}\rangle_D=\langle f|\boldsymbol{x}\rangle_D+\langle g|\boldsymbol{x}\rangle_D,\qquad \langle \lambda f|\boldsymbol{x}\rangle_D=\lambda\langle f|\boldsymbol{x}\rangle_D$$

となる．すなわち写像 $\langle\ |\ \rangle_D: V^*\times V\to \boldsymbol{R}$ は双線型写像である．これを V と V^* の双対性(そうついせい)を表す**内積**という．

記号 (0.1.11)　$f: X\to Y$，$x\mapsto y$ が全単射のとき，逆写像 $f^{-1}: Y\to$

X により元 y に x が対応する．この状況を

$$f: X \to Y,\ x \mapsto y,\ x \leftarrow\!\shortmid y$$

のように表すことがある．

$$f: X \to Y,\ x \leftrightarrow y$$

のようにも表す．

注意 (i) 線型空間の同型，自然同型，同一視について復習し，注意しておこう．線型空間の全単射線型写像を**同型写像**という．線型空間 V, W が**同型**であるとは同型写像 $f: V \to W$ が存在することであって，このとき

$$V \cong W$$

と表す．$\dim V = \dim W = n > 0$ ならば，同型写像 $V \to W$ は必ず無数に存在する．ところでたとえば (0.1.5) において，同型写像

$$\nu: V \cong V^{**}, \quad \boldsymbol{a} \leftrightarrow \nu(\boldsymbol{a})$$

は双対空間の概念に内在して自然に定まるもので，無数にある他の同型写像の中で特に**自然同型**という．これを用いて V と V^{**} とを同一視したのである．

一般に V と W の間に何等かの自然同型 $V \cong W$ が存在するとき，この同型写像を用いて V と W とを**同一視**し $V = W$ と見ることがある．同一視が行われたときにはどのような自然同型により同一視しているかに注目しなければならない．

(ii) 群の同型，自然同型，同一視についても同様である．

(iii) 集合 Y と部分集合 $Y \subseteqq X$ があるとき，恒等写像 $1_Y: Y \to X, y \mapsto y$ を記号

$$Y \hookrightarrow X$$

で表す．集合 X, Y と単射である写像 $f: Y \to X$ があるとき，元 $y \in Y$ とその像 $f(y) \in X$ とを同一視することがある．そのとき $y \mapsto f(y) = y$ であるが，これを

$$f: Y \hookrightarrow X$$

と書き表す．

§0.2 テンソル積 $V \otimes W$

集合と写像からなる図式



などにおいて，前者では $\psi\circ\phi=\theta$ が，後者では $g\circ i=j\circ f$ が成り立つことを，これらの図式は**可換**であるという．可換図式を次のように表す．

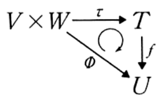


定義（0.2.1）　V, W を線型空間とする．このとき，線型空間 T と $\tau\in$ $Bilin(V\times W, T)$ の組 (T,τ) が条件

「$\forall$ 線型空間 U，$\forall\,\Phi\in Bilin(V\times W, U)$，$\exists_1 f\in Lin(T, U)$

$$\Phi=f\circ\tau \qquad\cdots①$$

が成り立つ．」



を満たすとき，組 (T,τ) を V, W の**テンソル積**といい，

$$T=:V\otimes W,\qquad \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}:=\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\quad(\boldsymbol{x}\in V,\ \boldsymbol{y}\in W)$$

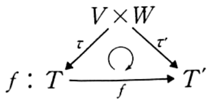
で表す．τ を**標準写像**という．τ は一般には全射ではない．上の性質①は，テンソル積 $(V\otimes W,\tau)$ の**普遍性**と呼ばれ，

$$Lin(V\otimes W, U)\cong Bilin(V\times W, U),\qquad f\mapsto f\circ\tau$$

のようにも表される．テンソル積 (T,τ) は以下に述べるように，必ず存在し，しかも同型を除いて唯一つしかない．初めに一意性を示す．

定理（0.2.2）　組 (T,τ) は同型を除いて一意的である．詳しく言えば，(T',τ') が (T,τ) と同じ性質①を持つとするとき，

「



となる同型写像 $f : T \cong T'$ が存在する．」

証明　上のような同型写像 f の存在を示す．

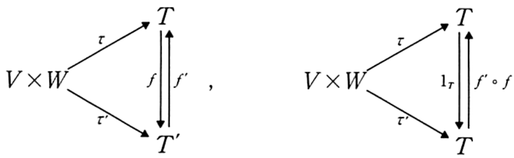
$\tau' \in Bilin(V \times W, T')$ だから，(T, τ) の普遍性より，

$$\exists_1 f \in Lin(T, T'), \quad \tau' = f \circ \tau \qquad \cdots ②$$

同様に，$\tau \in Bilin(V \times W, T)$だから，$(T', \tau')$ の普遍性より，

$$\exists_1 f' \in Lin(T', T), \quad \tau = f' \circ \tau' \qquad \cdots ③$$

が成り立つ．②と③より，



$$(f' \circ f) \circ \tau = \tau$$

が成り立つ．一方

$$1_T \circ \tau = \tau$$

である．ゆえに，①の f の一意性により，$f' \circ f = 1_T$ である．

同様に，$f \circ f' = 1_{T'}$ を得る．よって上の「　」内の主張が示された．

（証明終）

系（0. 2. 3）　$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$，$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$，$\lambda \in \boldsymbol{R}$

$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w},$$

$$\boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_2,$$

$$(\lambda \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \otimes (\lambda \boldsymbol{w}) = \lambda (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})$$

証明　$\tau : V \times W \to V \otimes W$ が双線型であるから，

$$\tau(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \tau(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \tau(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}),$$

$$\tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2),$$

$$\tau(\lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \tau(\boldsymbol{v}, \lambda \boldsymbol{w}) = \lambda \tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

である．これらを記号 $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} := \tau(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を用いて書き直せばよい．

（証明終）

次に V と W が有限次元の場合の，テンソル積 $V \otimes W$ の存在と双線型写像としての具体的な表現を，述べる．

定理（0.2.4）　V, W を有限次元の線型空間とする．このとき，

（ｉ）
$$T := Bilin(V^*\times W^*, \boldsymbol{R})$$
$$\tau : V\times W \to T,\quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\mapsto \tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$
$$\tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (V^*\times W^*\ni(f, g)\mapsto f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w})\in\boldsymbol{R})$$
と置けば，(T, τ) は V と W のテンソル積である．
$$\tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$$

$$\begin{array}{ccc} & V\times W & \\ {}^{\tau}\swarrow & & \searrow \\ Bilin(V^*\times W^*, \boldsymbol{R}) & \cong & V\otimes W \end{array}\quad\text{(自然同型)},$$

$$\begin{array}{ccc} & (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) & \\ {}^{\tau}\swarrow & & \searrow \\ ((f, g)\mapsto f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w})) & \leftrightarrow & \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} \end{array}$$

（ii）　$\dim(V\otimes W) = (\dim V)(\dim W)$

$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が V の基底列，$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$ が W の基底列ならば $(\boldsymbol{a}_i\otimes\boldsymbol{b}_j)_{1\leqq i\leqq n,\, 1\leqq j\leqq m}$ は $V\otimes W$ の基底列である．したがって
$$V\otimes W = \langle\{\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}\in V, \boldsymbol{y}\in W\}\rangle$$

（iii）　$V\ni\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$，$W\ni\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{o}$ ならば，$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{o}$

証明　（ｉ）　$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$ の双対基底列 $(f^1, \cdots, f^n)\subseteqq V^*$，$(g^1, \cdots, g^m)\subseteqq W^*$ を取る．$1\leqq i\leqq n$, $1\leqq j\leqq m$ に対し，$\Phi_{ij}\in T = Bilin(V^*\times W^*, \boldsymbol{R})$ を
$$\Phi_{ij}(f^h, g^k) = \delta_{(i,j)}{}^{(h,k)} = \begin{cases} 1 & ((i, j) = (h, k)) \\ 0 & ((i, j)\neq(h, k)) \end{cases}$$
により定めると，$(\Phi_{ij})_{1\leqq i\leqq n,\, 1\leqq j\leqq m}$ は T の基底である (0.1.9)．
$$\tau(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = \Phi_{ij} \qquad \cdots①$$
が成り立つ：実際，
$$\tau(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)(f^h, g^k) = f^h(\boldsymbol{a}_i)g^k(\boldsymbol{b}_j) = \delta_{(i,j)}{}^{(h,k)}$$
である．$T = V\otimes W$ を示すために，普遍性

「$\forall U$，$Lin(T, U)\cong Bilin(V\times W, U)$，$F\mapsto F\circ\tau$」

なることを示そう．

$\forall \varPhi \in Bilin(V \times W, U)$ に対し，$F \in Lin(T, U)$ を

$$F\left(\sum a_{ij}\varPhi_{ij}\right) := \sum a_{ij}\varPhi(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) \in U \qquad \cdots ②$$

により定義すれば，

$$\begin{aligned}(F \circ \tau)\left(\sum a^i \boldsymbol{a}_i, \ \sum b^j \boldsymbol{b}_j\right) &= F\left(\sum a^i b^j \tau(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)\right) \\ &= F\left(\sum a^i b^j \varPhi_{ij}\right) = \sum a^i b^j \varPhi(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) \\ &= \varPhi\left(\sum a^i \boldsymbol{a}_i, \sum b^j \boldsymbol{b}_j\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad F \circ \tau = \varPhi$$

F の存在がわかった．F は，存在するとすれば，等式②を満たさねばならないから，$\varPhi$ により一意に定まる．

(ii)　$\dim T = \dim Bilin(V^* \times W^*, \boldsymbol{R})$

$$= (\dim V^*)(\dim W^*) = (\dim V)(\dim W)$$

$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が V の基底列，$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$ が W の基底列ならば上の $(\varPhi_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ は T の基底列であって，

$$\boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{b}_j = \tau(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = \varPhi_{ij}$$

(iii)　$\boldsymbol{v}$ を含む V の基底列，$\boldsymbol{w}$ を含む W の基底列を取り，(ii) を適用すれば，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ を含む $V \otimes W$ の基底を得る．特に $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$ である．

（証明終）

系 (0. 2. 5)　V, W が有限次元の線型空間のとき，

$$\begin{array}{ccc} & V^* \times W^* & \\ \swarrow & & \searrow \\ V^* \otimes W^* & \cong & (V \otimes W)^*, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & (f, g) & \\ \swarrow & & \searrow \\ f \otimes g & & F \end{array}$$

$$F(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w})$$

すなわち

$$V^* \otimes W^* \cong (V \otimes W)^* \quad (\text{自然同型})$$

$$f \otimes g \leftrightarrow F = (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mapsto f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}))$$

証明　$V \otimes W \cong Bilin(V^* \times W^*, \boldsymbol{R})$ の V, W の位置に V^*, W^* を置く．$V^{**} = V$，$W^{**} = W$ だから

$$V^* \otimes W^* \cong Bilin(V \times W, \boldsymbol{R}) \cong Lin(V \otimes W, \boldsymbol{R}) = (V \otimes W)^*$$

$$f\otimes g \quad \mapsto \quad \Phi = F\circ\tau \quad \mapsto \quad F$$

$$\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}), \qquad F(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w})$$

(証明終)

命題（0.2.6）　V, W を線型空間，$V_1 \subseteqq V$，$W_1 \subseteqq W$ を部分空間とする．テンソル積 $(V\otimes W, \tau)$ において，$(\langle\tau(V_1\times W_1)\rangle, \tau \mid V_1\times W_1)$ は V_1 と W_1 のテンソル積である．

証明　$\tau_1 = \tau \mid V_1\times W_1$，$T_1 = \langle\tau(V_1\times W_1)\rangle \subseteqq V\otimes W$ と置く．$\forall$ 線型空間 U に対し

$$Lin(T_1, U) \to Bilin(V_1\times W_1, U), \quad F \mapsto F\circ\tau_1$$

が全単射であることを言えばよい．

$\forall \Phi_1 \in Bilin(V_1\times W_1, U)$ に対し，$\exists \Phi \in Bilin(V\times W, U)$

$$\Phi \mid V_1\times W_1 = \Phi_1$$

である．そこで，Φ に対し，$\exists F \in Lin(V\otimes W, U)$

$$\Phi = F\circ\tau$$

が成り立つ．このとき $F_1 = F \mid T_1$ とおけば，$\forall(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in V_1\times W_1$，

$$\begin{aligned}(F_1\circ\tau_1)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= F(\tau(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = F(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}) \\ &= \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \Phi_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ \therefore \quad \Phi_1 &= F_1\circ\tau_1\end{aligned}$$

(証明終)

定義（0.2.7）　$V_1, \cdots, V_n$，U を線型空間とする．

（i）　写像

$$\Phi: V_1\times\cdots\times V_n \to U$$

が，各変数について線型写像であるとき，Φ は n **重線型写像**であるという．**多重線型写像**ともいう．2重線型写像とは双線型写像に他ならない．

（ii）　$V_1\times\cdots\times V_n$ から U への n 重線型写像の全体を

$$Mult(V_1\times\cdots\times V_n, U)$$

で表す．各 V_i が有限次元のとき

$$\begin{aligned}&\dim Mult(V_1, \cdots, V_n, U) \\ &\quad = (\dim V_1)\cdots(\dim V_n)(\dim U)\end{aligned}$$

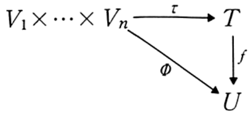
（iii）　$\exists$ 線型空間 T，$\exists \tau \in Mult(V_1\times\cdots\times V_n, T)$

$\forall$ 線型空間 U，$\forall \Phi \in Mult(V_1\times\cdots\times V_n, U)$，

$\exists_1 f \in Lin(T, U)$

$$\Phi = f \circ \tau \qquad \cdots ①$$

が成り立つ.



組 (T, τ) は一意的である. 組 (T, τ) を $V_1, \cdots, V_n$ の**テンソル積**といい,

$$T =: V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,$$

$$\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_n := \tau(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \quad (\boldsymbol{x}_i \in V_i)$$

で表す. τ を**標準写像**という. 上の性質①はテンソル積 $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \tau)$ の**普遍性**と呼ばれ, 次のようにも表される.

$$Lin(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, U) \cong Mult(V_1 \times \cdots \times V_n, U),$$

$$f \mapsto f \circ \tau$$

(iv) 各 V_i が有限次元のとき

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \cong Mult(V_1^* \times \cdots \times V_n^*, \boldsymbol{R})$$

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \cong Mult(V_1 \times \cdots \times V_n, \boldsymbol{R})$$

$$= V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$$

命題 (0.2.8) V_1, V_2, V_3 を線型空間とする. このとき

(i) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ (自然同型),

$\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3 \leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 \otimes (\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3)$

(ii) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ (自然同型),

$\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3 \leftrightarrow (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) \otimes \boldsymbol{v}_3$

(iii) $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ (自然同型),

$(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) \otimes \boldsymbol{v}_3 \leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 \otimes (\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3)$

証明 横沼 [15], p. 16 参照.

系 (0.2.9) (i) $\boldsymbol{R} \otimes V \cong V$ (自然同型),

$$\lambda \otimes \boldsymbol{v} \mapsto \lambda \boldsymbol{v}, \qquad 1 \otimes \boldsymbol{v} \leftarrow\!\shortmid \boldsymbol{v}$$

(ii) 特に $V = \boldsymbol{R}$ のとき,

$$\boldsymbol{R} \otimes \boldsymbol{R} \cong \boldsymbol{R} \quad (\text{自然同型}), \qquad \lambda(1 \otimes 1) \leftrightarrow \lambda$$

証明　$f:\lambda\otimes\boldsymbol{v}\mapsto\lambda\boldsymbol{v}$，$g:\boldsymbol{v}\mapsto 1\otimes\boldsymbol{v}$ はそれぞれ線型写像である．

$$(g\circ f)(1\otimes\boldsymbol{v})=g(1\boldsymbol{v})=g(\boldsymbol{v})=1\otimes\boldsymbol{v}$$

$$(f\circ g)(\boldsymbol{v})=f(1\otimes\boldsymbol{v})=1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$$

$$\therefore\quad g\circ f=1,\qquad f\circ g=1_V$$

（証明終）

系（0.2.10）　V, W を線型空間とする．

（i）　$\forall\boldsymbol{u}\in V\otimes W$，$\exists\boldsymbol{v}_i\in V$，$\exists\boldsymbol{w}_j\in W$，

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_r\otimes\boldsymbol{w}_r$，$\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_r$ は線型独立にとれる．

（ii）　$\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_r$ を（i）のように定めたとき，$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ は一意的である．

証明　（i）　$\{\boldsymbol{a}_i\}$ を V の基底列，$\{\boldsymbol{b}_j\}$ を W の基底列とする．

$$\boldsymbol{u}=\sum a_{ij}(\boldsymbol{a}_i\otimes\boldsymbol{b}_j)\quad\text{（有限和）}$$

と表される．このとき

$$\boldsymbol{u}=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\boldsymbol{a}_i\right)\otimes\boldsymbol{b}_j\quad\text{（有限和）}$$

であって，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots$ は一次独立である．

（ii）「$\sum\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_i=\sum\boldsymbol{v}_i'\otimes\boldsymbol{w}_i\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_i'$」を示す．

$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_r\}$ を含む W の基底列 $B=\{\boldsymbol{w}_i\}$ と V の任意の基底列 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ を定め

$$\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_i'=\sum_j a_{ij}\boldsymbol{a}_j\quad\text{（有限和）}$$

と表す．このとき，

$$\boldsymbol{o}=\sum_i\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_i-\sum_i\boldsymbol{v}_i'\otimes\boldsymbol{w}_i=\sum_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_i')\otimes\boldsymbol{w}_i$$

$$=\sum_i\left(\sum_j a_{ij}\boldsymbol{a}_j\right)\otimes\boldsymbol{w}_i=\sum_i\sum_j a_{ij}\boldsymbol{a}_j\otimes\boldsymbol{w}_i$$

が成り立つ．ところが $\{\boldsymbol{a}_j\otimes\boldsymbol{w}_i\}$ は $V\otimes W$ の基底となるから，$\forall a_{ij}=0$．

$$\therefore\quad\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_i'$$

（証明終）

§0.2 の練習問題

問題 1.　V, W, U を線型空間とする．

$$Bilin(V\times W, U)\cong Lin(V, Lin(W, U))$$

$$f\mapsto(V\ni\boldsymbol{v}\mapsto\lambda_v\in Lin(W, U)),\qquad\text{ただし }\lambda_v(\boldsymbol{w})=f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

である．特に，$U=\boldsymbol{R}$ のとき

$$V^*\otimes W^*\cong Bilin(V\times W,\boldsymbol{R})\cong Lin(V, W^*)$$

さらに，W の位置に W^* をおけば，

$$V^* \otimes W \cong Lin(V, W)$$

問題 2. V, W を線型空間とする．$V \otimes W \cong W \otimes V$，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}$

問題 3. V, W_1, W_2 をアフィン線型空間とする．

$$V \otimes (W_1 \oplus W_2) \cong (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$$

$$\boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \mapsto (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_2)$$

答

1. $f \in Bilin(V \times W, U)$ に対し，$V \ni \boldsymbol{v}$ を定めたとき，

$$\boldsymbol{w} \mapsto \lambda_{f,v}(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

は $\boldsymbol{w} \in W$ に関して線型であるから $\lambda_{f,v} \in Lin(W, U)$ である．

$$\Psi(f)(\boldsymbol{v}) = \lambda_{f,v} \in Lin(W, U)$$

と置けば，Ψ は線型写像

$$Bilin(V \times W, U) \to Lin(V, Lin(W, U))$$

である．実際

$$\begin{aligned}\Psi(af+g)(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}) &= \lambda_{af+g,v}(\boldsymbol{w}) \\ &= (af+g)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &= af(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &= a\Psi(f)(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}) + \Psi(g)(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}) \\ &= \{a\Psi(f)(\boldsymbol{v}) + \Psi(g)(\boldsymbol{v})\}(\boldsymbol{w})\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Psi(af+g)(\boldsymbol{v}) = a\Psi(f)(\boldsymbol{v}) + \Psi(g)(\boldsymbol{v})$$

$$\therefore \quad \Psi(af+g) = a\Psi(f) + \Psi(g)$$

$Bilin(V \times W, U) \supseteqq \mathrm{Ker}\,\Psi = \{\boldsymbol{o}\}$ なること：

$Lin(V, Lin(W, U)) \ni \Psi(f) = \boldsymbol{o}$ とする．$\forall \boldsymbol{v}$，$\Psi(f)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \in Lin(W, U)$

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{o} = \lambda_{f,v}(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

$$\therefore \quad f = \boldsymbol{o} \in Bilin(V \times W, U)$$

$\mathrm{Im}\,\Psi = Lin(V, Lin(W, U))$ なること：

$$\dim \mathrm{Im}\,\Psi = \dim Bilin(V \times W, U) = \dim V \cdot \dim W \cdot \dim U$$

$$\dim(Lin(V, Lin(W, U))) = \dim V \cdot \dim Lin(W, U)$$

であって，両者は等しい．ゆえに

$$\mathrm{Im}\,\Psi = Lin(V, Lin(W, U))$$

$$Bilin(V \times W, U) \cong \mathrm{Im}\,\Psi = Lin(V, Lin(W, U))$$

2. 写像 Φ：$V \times W \to W \otimes V$，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}$ は双線型である．ゆえに ∃ 線型

写像 $f: V\otimes W \to W\otimes V$,

$$f(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}) = \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v} \qquad \cdots①$$

同様に，∃ 線型写像 $g: W\otimes V \to V\otimes W$,

$$g(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} \qquad \cdots②$$

が成り立つ．ゆえに生成元 $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\in V\otimes W$，$\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}\in W\otimes V$ の上で,

$$g\circ f=1, \quad f\circ g=1 \qquad \cdots③$$

が成り立つ．ゆえに $V\otimes W$，$W\otimes V$ 上で③が成り立つ．

3. $\Phi: V\times(W_1\oplus W_2)\to(V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)$

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)\mapsto(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_2)$$

は双線型である．

$$\begin{aligned}
\because\quad &\Phi[\lambda\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2]\\
&=[(\lambda\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\otimes\boldsymbol{w}_1]+[(\lambda\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\otimes\boldsymbol{w}_2]\\
&=[\lambda\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{w}_1]+[\lambda\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{w}_2]\\
&=[\lambda\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{w}_1+\lambda\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{w}_2]+[\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{w}_2]\\
&=\lambda\Phi[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2]+\Phi[\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2]
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
&\Phi[\boldsymbol{v}, \lambda(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)+(\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2')]\\
&=\Phi[\boldsymbol{v}, (\lambda\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_1')+(\lambda\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_2')]\\
&=[\boldsymbol{v}\otimes(\lambda\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_1')]+[\boldsymbol{v}\otimes(\lambda\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_2')]\\
&=[\lambda\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1']+[\lambda\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_2']\\
&=[\lambda\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1+\lambda\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_2]+[\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_2']\\
&=\lambda\Phi[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2]+\Phi[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2']
\end{aligned}$$

∴　∃ 線型写像 $f: V\otimes(W_1\oplus W_2)\to(V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)$

$$f[\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)]=(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_2)$$

が成り立つ．

f は全射である．

∵　∀ 生成元 $(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{v}'\otimes\boldsymbol{w}_2)\in(V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)$ に対し

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{o}_2)+\boldsymbol{v}'\otimes(\boldsymbol{o}_1+\boldsymbol{w}_2)\in V\otimes(W_1\oplus W_2)$$

を考えると,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x})&=f[\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{o}_2)]+f[\boldsymbol{v}'\otimes(\boldsymbol{o}_1+\boldsymbol{w}_2)]\\
&=(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{o}_2)+(\boldsymbol{v}'\otimes\boldsymbol{o}_1)+(\boldsymbol{v}'\otimes\boldsymbol{w}_2)\\
&=(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{v}'\otimes\boldsymbol{w}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim[V\otimes(W_1\oplus W_2)]&=\dim V(\dim W_1+\dim W_2)\\&=\dim V\dim W_1+\dim V\dim W_2\\&=\dim[(V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)]\end{aligned}$$

$\therefore$　f は同型写像

$$V\otimes(W_1\oplus W_2)\cong(V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)$$

§0.3　混合テンソル $T^p{}_q(V)$

各線型空間 V_i が有限次元のとき

$$V_1\otimes\cdots\otimes V_n\cong Mult(V_1{}^*\times\cdots\times V_n{}^*,\boldsymbol{R})\quad(\text{自然同型})$$

$$\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_n\leftrightarrow((f^1,\cdots,f^n)\mapsto f^1(\boldsymbol{v}_1)\cdots f^n(\boldsymbol{v}_n)),$$

であった (0.2.4), (0.2.7).

定義 (0.3.1)　V をアフィン線型空間とする．このとき，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$p+q>0$ に対し，

$$\begin{aligned}T^p{}_q(V)=(\otimes^p\ V)\otimes(\otimes^q\ V^*)&:=(\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{p\text{個}})\otimes(\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{q\text{個}})\\&=Mult(\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p\text{個}}\times\overbrace{V\times\cdots\times V}^{q\text{個}},\boldsymbol{R})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T^p(V)=\otimes^p\ V:=T^p{}_0(V)&=V\otimes\cdots\otimes V\\&=Mult(V^*\times\cdots\times V^*,\boldsymbol{R})\\T_q(V)=\otimes^q\ V^*:=T^0{}_q(V)&=V^*\otimes\cdots\otimes V^*\\&=Mult(V\times\cdots\times V,\boldsymbol{R})\\T^0(V)=T_0(V)=T^0{}_0(V)&:=\boldsymbol{R}\end{aligned}$$

と置く．$p\geqq0$，$q\geqq0$ のとき，$T^p{}_q(V)$ を (p,q) **型のテンソル空間**という．$T^p{}_q(V)$ の元を (p,q)**型のテンソル**または p **階反変** q **階共変テンソル**という．一般にテンソル積の結合法則 $V_1\otimes V_2\otimes V_3\cong V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$ と可換法則 $V\otimes W\cong W\otimes V$（§0.2 の練習問題 2）により，$p$ 個の V と q 個の V^* の任意の順序のテンソル積が (p,q) 型のテンソル空間 $T^p{}_q(V)$ と同型である．特に $(p,0)$ 型のテンソルを p **階反変テンソル**，$(0,q)$ 型のテンソルを q **階共変テンソル**という．$T^1{}_0(V):=V$ の元とは**反変ベクトル**，$T^0{}_1(V):=V^*$ の元とは**共変ベクトル**に他ならない．$T^0{}_0(V):=\boldsymbol{R}$ の元を**スカラー**という．

$$\dim T^p{}_q(V)=(\dim V)^{p+q}$$

例（0.3.2）　V がアフィン線型空間のとき，

$$\begin{array}{ccc} & V^*\times V^* & \\ \swarrow & & \searrow \\ T^0{}_2(V)=V^*\otimes V^* & \cong & Bilin(V\times V,\boldsymbol{R}) \end{array}$$

$$f\otimes g \leftrightarrow (V\times V\ni(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mapsto f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}))$$

すなわち V 上の双線型形式は $(0,2)$ 型のテンソルである．

定理（0.3.3）　（ i ）p 階共変テンソルの空間 $T_p(V)=\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{p\,個}$ と p 階反変テンソルの空間 $T^p(V)=V\otimes\cdots\otimes V$ とは，内積

$$\left.\begin{array}{l} T_p(V)\ni T=f^1\otimes\cdots\otimes f^p \\ T^p(V)\ni \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_p \end{array}\right\}\mapsto\langle T|\boldsymbol{X}\rangle_T=\langle\boldsymbol{X}|T\rangle_T=T(\boldsymbol{X})$$

$$T(\boldsymbol{X}):=f^1(\boldsymbol{x}_1)\cdots f^p(\boldsymbol{x}_p)$$

によって，互いに他の双対空間である．すなわち

$$T_p(V)=\bigotimes^p V^*\cong(\bigotimes^p V)^*=(T^p(V))^*\quad（自然同型）$$

$$T_p(V)\cong(T^p(V))^*\quad（自然同型）$$

$$f^1\otimes\cdots\otimes f^p\leftrightarrow\langle f^1\otimes\cdots\otimes f^p|\quad\rangle_T$$

もっと一般に

（ii）　(p,q) 型のテンソル空間 $T^p{}_q(V)=(\bigotimes^p V)\otimes(\bigotimes^q V^*)$ と

　　(q,p) 型のテンソル空間 $T^q{}_p(V)=(\bigotimes^q V)\otimes(\bigotimes^p V^*)$

とは互いに他の双対空間である．すなわち

$$T^p{}_q(V)\cong T^q{}_p(V)^*\quad（自然同型）$$

$$\boldsymbol{y}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_p\otimes g^1\otimes\cdots\otimes g^q$$
$$\leftrightarrow(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_q\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^p\mapsto g^1(\boldsymbol{x}_1)\cdots g^q(\boldsymbol{x}_q)f^1(\boldsymbol{y}_1)\cdots f^p(\boldsymbol{y}_p))$$

証明　（ i ）　［4］，(1.2.7)

（ii）　一般に，$V^{**}=V$，$(V_1\otimes\cdots\otimes V_n)^*\cong V_1{}^*\otimes\cdots\otimes V_n{}^*$ だから，

$$\begin{aligned} T^p{}_q(V)&=(\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{p\,個})\otimes(\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{q\,個}) \\ &\cong(V^{**}\otimes\cdots\otimes V^{**})\otimes(V^*\otimes\cdots\otimes V^*) \\ &=(\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{p\,個}\otimes\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{q\,個})^* \end{aligned}$$

$$\cong (\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{q\text{個}})^*\otimes(\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{p\text{個}})^* = T^q{}_p(V)^*$$

$$\begin{array}{c} T^p{}_q(V)\cong Mult(\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{q\text{個}}\times \overbrace{V\times\cdots\times V}^{p\text{個}}, \boldsymbol{R}) \\ \Uparrow \qquad\qquad\qquad \Uparrow \end{array}$$

$$T=\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_p\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^q$$
$$\leftrightarrow (\langle g^1, \cdots, g^q, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_p\rangle) \mapsto g^1(\boldsymbol{x}_1)\cdots g^q(\boldsymbol{x}_q) f^1(\boldsymbol{y}_1)\cdots f^p(\boldsymbol{y}_p)$$

すなわち $T : T^q{}_p(V) = Mult(\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p\text{個}}\times \overbrace{V\times\cdots\times V}^{q\text{個}}, \boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$

$$\begin{array}{c} \Uparrow \qquad\qquad \Uparrow \\ S=\boldsymbol{y}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_p\otimes g^1\otimes\cdots\otimes g^q \mapsto f^1(\boldsymbol{y}_1)\cdots f^p(\boldsymbol{y}_p)\, g^1(\boldsymbol{x}_1)\cdots g^q(\boldsymbol{x}_q)\end{array}$$

に対し，

$$\langle T \mid S\rangle_T := f^1(\boldsymbol{y}_1)\cdots f^p(\boldsymbol{y}_p)\, g^1(\boldsymbol{x}_1)\cdots g^q(\boldsymbol{x}_q)$$

と置けば，これが $T^p{}_q(V)$ と $T^q{}_p(V)$ との双対性を表す内積となる．詳細は [4]，(1. 2. 7) と同様．　(証明終)

定義 (0. 3. 4)　$\dim V=n$ とする．このとき $\dim T^p{}_q(V)=n^{p+q}$ である．

(i)　V の基底列 $\varepsilon=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ に対し，$(f^1, \cdots, f^n)$ をその双対基底列とするとき，列

$$(\boldsymbol{a}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q})_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}$$

(辞書式順序)

は $T^p{}_q(V)=(\bigotimes^p V)\otimes(\bigotimes^q V^*)$ の基底列である (0. 2. 4)．これを ε に関する $T^p{}_q(V)$ の**標準基底**といい，簡単のために

$$\boldsymbol{T}_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}=\boldsymbol{a}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$$

と表す．$\forall Z\in T^p{}_q(V)$ は

$$Z=\sum\xi^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{T}_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}\quad(\xi^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\in\boldsymbol{R})$$

と表される．列

$$(\xi^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q})_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}$$

を基底列 ε に関する Z の**成分**または**成分表示**という．

命題 (0. 3. 5)　$T^p{}_q(V)=(\bigotimes^p V)\otimes(\bigotimes^q V^*)$

$$\cong Mult(\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p\text{ 個}}\times\overbrace{V\times\cdots\times V}^{q\text{ 個}}, \boldsymbol{R})\ni\Phi$$

の基底列 $\varepsilon=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ に関する成分表示を

$$(\eta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q})_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}$$

とするとき

$$\eta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}=\Phi(f^{i_1}, \cdots, f^{i_p}, \boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_q})$$

証明　$\Phi=\sum_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}\eta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{a}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}(f^{k_1}, \cdots, f^{k_p}, \boldsymbol{a}_{h_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{h_q})\\&\quad=f^{k_1}(\boldsymbol{a}_{i_1})\cdots f^{k_p}(\boldsymbol{a}_{i_p})f^{j_1}(\boldsymbol{a}_{h_1})\cdots f^{j_q}(\boldsymbol{a}_{h_q})\\&\quad=\delta^{k_1}{}_{i_1}\cdots\delta^{k_p}{}_{i_p}\delta^{j_1}{}_{h_1}\cdots\delta^{j_q}{}_{h_q}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\Phi(f^{k_1}, \cdots, f^{k_p}, \boldsymbol{a}_{h_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{h_q})\\&\quad=\sum_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}\eta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\delta^{k_1}{}_{i_1}\cdots\delta^{k_p}{}_{i_p}\delta^{j_1}{}_{h_1}\cdots\delta^{j_q}{}_{h_q}\\&\quad=\eta^{k_1\cdots k_p}{}_{h_1\cdots h_q}\end{aligned}$$

（証明終）

定理（0.3.6）（**テンソル成分の変換則**）　アフィン線型空間 V において，基底列 $\varepsilon=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ から基底列 $\varepsilon'=(\boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_n')$ への変換行列を

$$T=(a^i{}_j)_{1\leq i,j\leq n}=\begin{bmatrix}a^1{}_1 & \cdots & a^1{}_j & \cdots & a^1{}_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a^i{}_1 & \cdots & a^i{}_j & \cdots & a^i{}_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a^n{}_1 & \cdots & a^n{}_j & \cdots & a^n{}_n\end{bmatrix},\qquad T^{-1}=(b^i{}_j)_{1\leq i,j\leq n}$$

すなわち

$$\boldsymbol{a}'_j=\sum_{1\leq i\leq n}\boldsymbol{a}_i a^i{}_j,\qquad \boldsymbol{a}_j=\sum_{1\leq i\leq n}\boldsymbol{a}'_i b^i{}_j\qquad\cdots①$$

したがって

$$f^i=\sum f'^j a^i{}_j,\qquad f'^i=\sum f^j b^i{}_j\qquad\cdots②$$

とする（(0.1.6) の (ii)）。このとき

（i）　$\forall$ テンソル $Z\in T^p{}_q(V)$ の基底列 $\varepsilon, \varepsilon'$ に関する Z の成分をそれぞれ

$$(\xi^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q})_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}$$

$$(\xi'^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q})_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}$$

とすると

$$\xi'^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}=\sum_{1\leqq k_1,\cdots,k_p,h_1,\cdots,h_q\leqq n} a^{h_1}{}_{j_1}\cdots a^{h_q}{}_{j_q}b^{i_1}{}_{k_1}\cdots b^{i_p}{}_{k_p}\xi^{k_1\cdots k_p}{}_{h_1\cdots h_q}$$

が成り立つ．特に

（ii） $(p,q)=(1,0)$ のとき，反変ベクトル

$T^1{}_0(V)=V\ni \boldsymbol{x}=\sum_{1\leqq i\leqq n}\xi^i\boldsymbol{a}_i=\sum_{1\leqq i\leqq n}\xi'^i\boldsymbol{a}'_i$ とすれば，

$$\xi'^i=\sum_{1\leqq k\leqq n}b^i{}_k\xi^k$$

また $(p,q)=(0,1)$ のとき，共変ベクトル $T^0{}_1(V)=V^*\ni f$ を ε,ε' の双対基底列 $f^1,\cdots,f^n\in V^*$，$f'^1,\cdots,f'^n\in V^*$ を用いて

$V^*\ni f=\sum\lambda_i f^i=\sum\lambda'_j f'^j$ とすれば，

$$\lambda'_j=\sum a^h{}_j\lambda_h$$

が成り立つ（0.1.6）．

証明

$$\boldsymbol{T}_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}=\boldsymbol{a}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$$
$$\boldsymbol{T}'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}=\boldsymbol{a}'_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}'_{j_q}\otimes f'^{i_1}\otimes\cdots\otimes f'^{i_p}$$

と置く．

$\langle\boldsymbol{T}_{k_1\cdots k_p}{}^{h_1\cdots h_q}\mid\boldsymbol{T}'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}\rangle_T$

$=\langle\boldsymbol{a}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}_{k_p}\otimes f^{h_1}\otimes\cdots\otimes f^{h_q}\mid\boldsymbol{a}'_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}'_{j_q}\otimes f'^{i_1}\otimes\cdots\otimes f'^{i_p}\rangle_T$ …③

一方

$$\boldsymbol{a}'_j=\sum\boldsymbol{a}_i a^i{}_j,\qquad \boldsymbol{a}_k=\sum\boldsymbol{a}'_i b^i{}_k \qquad\cdots①$$
$$f'^i=\sum f^j b^i{}_j,\qquad f^h=\sum f'^j a^h{}_j \qquad\cdots②$$

より

$$f^h(\boldsymbol{a}'_j)=a^h{}_j,\qquad f'^i(\boldsymbol{a}_k)=b^i{}_k$$

である．これを代入して，

$$③=b^{i_1}{}_{k_1}\cdots b^{i_p}{}_{k_p}a^{h_1}{}_{j_1}\cdots a^{h_q}{}_{j_q}$$

である．一方

$$Z=\sum_{1\leqq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leqq n}\xi^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{T}_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}$$

であるから，

$\xi'^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}=\langle Z\mid\boldsymbol{T}'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}\rangle_T$

$$=\sum_{1\leqq k_1,\cdots,k_p,h_1,\cdots,h_q\leqq n}\xi^{k_1\cdots k_p}{}_{h_1\cdots h_q}\langle \boldsymbol{T}_{k_1\cdots k_p}{}^{h_1\cdots h_q} \mid \boldsymbol{T}'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}\rangle_T$$
$$=\sum_{1\leqq k_1,\cdots,k_p,h_1,\cdots,h_q\leqq n}\xi^{k_1\cdots k_p}{}_{h_1\cdots h_q}b^{i_1}{}_{k_1}\cdots b^{i_p}{}_{k_p}a^{h_1}{}_{j_1}\cdots a^{h_q}{}_{j_q}$$
$$=\sum_{1\leqq k_1,\cdots,k_p,h_1,\cdots,h_q\leqq n}a^{h_1}{}_{j_1}\cdots a^{h_q}{}_{j_q}b^{i_1}{}_{k_1}\cdots b^{i_p}{}_{k_p}\xi^{k_1\cdots k_p}{}_{h_1\cdots h_q}$$
（証明終）

命題（0.3.7）　$p>0$，$q>0$ とし，$1\leqq r\leqq p$，$1\leqq s\leqq q$ なる (r,s) を定めたとき，

$$\exists_1 \text{ 線型変換 } c^r_s\colon T^p{}_q(V)\to T^{p-1}{}_{q-1}(V)$$

$\forall \boldsymbol{v}_i\in V$，$\phi^j\in V^*$，

$$c^r_s(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_p\otimes\phi^1\otimes\cdots\otimes\phi^q)$$
$$=\langle\phi^s \mid \boldsymbol{v}_r\rangle_D(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{v}}_r\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_p\otimes\phi^1\otimes\cdots\otimes\hat{\phi}^s\otimes\cdots\otimes\phi^q)$$

が成り立つ．線型変換 c^r_s を添え字 (r,s) に関する**縮約**という．

証明　写像

$$\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p\text{ 個}}\times\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{q\text{ 個}}\to T^{p-1}{}_{q-1}(V)$$
$$(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\phi^1,\cdots,\phi^q)$$
$$\to\phi^s(\boldsymbol{v}_r)(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{v}}_r\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_p\otimes\phi^1\otimes\cdots\otimes\hat{\phi}^s\otimes\cdots\otimes\phi^q)$$

が $(p+q)$ 重の線型写像であることによる．　（証明終）

命題（0.3.8）　$p\geqq1$，p 個の縮約 $c^r_r\colon T^r{}_r(V)\to T^{r-1}{}_{r-1}(V)$，$1\leqq r\leqq p$ の合成写像を $c=c^1_1\cdots c^p_p\colon T^p{}_p(V)\to\boldsymbol{R}$ とするとき

$\forall \boldsymbol{X}\in T^p(V)$，$F\in T^p(V^*)$

$$c(\boldsymbol{X}\otimes F)=\langle\boldsymbol{X} \mid F\rangle_T$$

証明　$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_p\in T^p(V)$，$F=\phi^1\otimes\cdots\otimes\phi^p\in T^p(V^*)$ としてよい．このとき

$$c(\boldsymbol{X}\otimes F)=\phi^p(\boldsymbol{v}_p)c^1_1\cdots c^{p-1}_{p-1}(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{p-1}\otimes\phi^1\otimes\cdots\otimes\phi^{p-1})$$
$$=\phi^p(\boldsymbol{v}_p)\cdots\phi^1(\boldsymbol{v}_1)$$
$$=\langle\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_p \mid \phi^1\otimes\cdots\otimes\phi^p\rangle_T=\langle\boldsymbol{X} \mid F\rangle_T$$
（証明終）

§0.4　q 形式（交代共変テンソル）$A^q(V^*)$，外積 $F\wedge G$

$Aut(\{1,\cdots,q\}):=S_q=$（$q$ 文字 $1,\cdots,q$ の置換全体），$\mathrm{sgn}(\sigma)$ を $\sigma\in Aut(\{1,\cdots,q\})$ の符号とする．

定義 (0.4.1) $q \geqq 1$ とする．共変テンソル

$$f \in T_q(V) = T^q(V^*) = V^* \otimes \cdots \otimes V^* = Mult(V \times \cdots \times V, \boldsymbol{R})$$

に対し，次のように定義する．

(i) f が**対称共変テンソル** $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma \in Aut(\{1, \cdots, q\})$

$$f(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(q)}) = f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q)$$

(ii) f が**交代共変テンソル** $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma \in Aut(\{1, \cdots, q\})$

$$f(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(q)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q)$$

記号と命題 (0.4.2) (i) $A^0(V^*) := T^0(V^*) = \boldsymbol{R}$，$q \geqq 1$ のとき

$$A^q(V^*) := (q \text{ 階の交代共変テンソルの全体}) \subseteqq T^q(V^*)$$

と置く．$A^1(V^*) = T^1(V^*) = V^*$ である．$q \geqq 0$ に対し

$$\bigwedge^q(V^*) = \overbrace{V^* \wedge \cdots \wedge V^*}^{q \text{ 個}} := A^q(V^*)$$

とも表す．$A^q(V^*)$ の元を q **形式**という．**余** q **ベクトル**ともいう．

(iii) $1 \leqq \dim V = n$ とする．

$$0 \leqq q \leqq n \text{ のとき，} \dim A^q(V^*) = {}_n\mathrm{C}_q$$

$$n < q \text{ のとき，} A^q(V^*) = \{\boldsymbol{o}\}$$

証明 [4]，(1.3.5) 参照．

例 (0.4.3) $V = \boldsymbol{R}^n$ のとき

(i) 行列式関数

$$\det : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{n \text{ 個}} \to \boldsymbol{R}, \qquad (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \mapsto \det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

は n 形式，すなわち n 階の交代共変テンソルである．

(ii) $\dim A^n(V^*) = {}_n\mathrm{C}_n = 1$，$A^n(V^*) \ni \det \neq 0$

したがって，関数 det は $A^n(V^*)$ の基底である．

$$A^n(V^*) = \boldsymbol{R} \det$$

定義 (0.4.4) アフィン線型空間 V において，$q \geqq 1$ のとき

(i) $f \in T^q(V^*)$ に対し $\mathscr{A}(f) \in A^q(V^*)$ を

$$\mathscr{A}(f)(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in Aut(\{1, \cdots, q\})} \mathrm{sgn}(\sigma) f(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(q)})$$

により定義する．$|S_q| = |Aut(\{1, \cdots, q\})| = q!$ なることに注意しよう．

(ii) 写像 $\mathscr{A} : T^q(V^*) \to A^q(V^*)$ は線型写像であって，**交代化作用素**と

いう．

$$f\in T^q(V^*) \text{ が交代テンソル} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}f=f$$

したがって $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$ が成り立つ．特に $\mathscr{A}: T^q(V^*)\to A^q(V^*)$ は全射である．

（iii）　たとえば，$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\in V$（基底でなくてもよい）

$$\boldsymbol{x}=\sum x^i\boldsymbol{b}_i,\quad \boldsymbol{y}=\sum y^j\boldsymbol{b}_j,\quad \boldsymbol{z}=\sum z^k\boldsymbol{b}_k$$

とすると，$q=2$ のとき

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}f)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\\&=\frac{1}{2}(\sum_{i,j}x^iy^jf(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j)-\sum y^ix^jf(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j))\\&=\frac{1}{2}(\sum_{i,j}x^iy^j-x^jy^i)f(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j)\\&=\frac{1}{2}(\sum_{i,j}\det\begin{bmatrix}x^i & x^j\\ y^i & y^j\end{bmatrix}f(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j))\end{aligned}$$

$q=3$ のとき

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}f)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})&=\frac{1}{3!}\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\\&\quad+f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\&\quad-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\}\\&=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\det\begin{bmatrix}x^i & x^j & x^k\\ y^i & y^j & y^k\\ z^i & z^j & z^k\end{bmatrix}f(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{b}_k)\end{aligned}$$

一般に $2\leqq q\leqq n$，$\boldsymbol{x}_i=\sum x_i{}^j\boldsymbol{b}_j$ のとき

$$(\mathscr{A}f)(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_q)=\frac{1}{q!}\sum_{1\leq i_1,\cdots,i_q\leq n}\det\begin{bmatrix}x_1{}^{i_1} & \cdots & x_1{}^{i_q}\\ \vdots & & \vdots\\ x_q{}^{i_1} & \cdots & x_q{}^{i_q}\end{bmatrix}f(\boldsymbol{b}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{b}_{i_q})$$

例（0.4.5）　$f^1,\cdots,f^q\in V^*$，$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_q\in V$，$\tau\in Aut(\{1,\cdots,q\})$ に対し

（i）　$$\mathscr{A}(f^1\otimes\cdots\otimes f^q)(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_q)=\frac{1}{q!}\det\begin{bmatrix}f^1(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & f^1(\boldsymbol{x}_q)\\ \vdots & & \vdots\\ f^q(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & f^q(\boldsymbol{x}_q)\end{bmatrix}$$

（ii）　$$\mathscr{A}(f^1\otimes\cdots\otimes f^q)=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in Aut(\{1,\cdots,q\})}\mathrm{sgn}(\sigma)f^{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f^{\sigma(q)}$$

(iii) $\mathscr{A}(f^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes f^{\tau(q)})=\mathrm{sgn}(\tau)\mathscr{A}(f^1\otimes\cdots\otimes f^q)$

証明 [4], (1.3.8) 参照.

定義と命題 (0.4.6) $p\geqq 0$, $q\geqq 0$,

(i) $f\in A^p(V^*)$, $g\in A^q(V^*)$ に対し

$$f\wedge g:=\frac{(p+q)!}{p!\,q!}\mathscr{A}(f\otimes g)\in A^{p+q}(V^*)$$

(ii) $p=0$ のとき, $f=\lambda\in A^0(V^*)=\boldsymbol{R}$, $\lambda\wedge g=\lambda g$

(iii)
$$f\wedge g=(-1)^{pq}(g\wedge f)$$
$$(f^1+f^2)\wedge g=f^1\wedge g+f^2\wedge g,\qquad (\lambda f)\wedge g=\lambda(f\wedge g)$$
$$f\wedge(g^1+g^2)=f\wedge g^1+f\wedge g^2,\qquad f\wedge(\lambda g)=\lambda(f\wedge g)$$

(iv) さらに $h\in A^r(V^*)$ のとき

$$(f\wedge g)\wedge h=f\wedge(g\wedge h)=\frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\mathscr{A}(f\otimes g\otimes h)$$

が成り立つ. これを $f\wedge g\wedge h$ で表す.

(v) 特に, $f,g\in A^1(V^*)=V^*$ のとき,

$$f\wedge g=-(g\wedge f),\qquad f\wedge f=0$$

が成り立つ.

定理 (0.4.7) $f^1,\cdots,f^q\in V^*$, $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_q\in V$ に対し,

(i) $f^1\wedge\cdots\wedge f^q=q!\,\mathscr{A}(f^1\otimes\cdots\otimes f^q)$

$$=\sum_{\sigma\in Aut(\{1,\cdots,q\})}\mathrm{sgn}(\sigma)f^{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f^{\sigma(q)}$$

(ii) $(f^1\wedge\cdots\wedge f^q)(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_q)$

$$=\langle f^1\wedge\cdots\wedge f^q\mid\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_q\rangle_T$$

$$=\det\begin{bmatrix}\langle f^1\mid\boldsymbol{x}_1\rangle_D & \cdots & \langle f^1\mid\boldsymbol{x}_q\rangle_D\\ \vdots & & \vdots\\ \langle f^q\mid\boldsymbol{x}_1\rangle_D & \cdots & \langle f^q\mid\boldsymbol{x}_q\rangle_D\end{bmatrix}$$

(iii) 基底列 $f^1,\cdots,f^n\in V^*$ に対し

(イ) $(f^i\wedge f^j)_{1\leqq i\leqq j\leqq n}$ (辞書式順序) は $A^2(V^*)$ の基底列である.

$n=3$ のとき $(f^1\wedge f^2, f^1\wedge f^3, f^2\wedge f^3)$

$$\sim(f^1\wedge f^2, f^2\wedge f^3, f^3\wedge f^1)$$
$$\sim(f^2\wedge f^3, f^3\wedge f^1, f^1\wedge f^2)$$

記号 ～ については ［4］，§2.2 の練習問題 4 または本書の（1.2.7）参照．

$\forall f\in A^2(V^*)$ は

$$\begin{aligned} f &= A_1 f^2\wedge f^3 + A_2 f^3\wedge f^1 + A_3 f^1\wedge f^2 \\ &= A_1(f^2\otimes f^3 - f^3\otimes f^2) \\ &\quad + A_2(f^3\otimes f^1 - f^1\otimes f^3) \\ &\quad + A_3(f^1\otimes f^2 - f^2\otimes f^1) \end{aligned}$$

と表される．

（ロ）　$(f^i\wedge f^j\wedge f^k)_{1\leqq i<j<k\leqq n}$ は $A^3(V^*)$ の基底列である．

（iv）　$n=q$ のとき，$A^n(V^*)=\boldsymbol{R}f^1\wedge\cdots\wedge f^n$

定理（0.4.8）　$q\geqq 2$ とする．

（ i ）　$f^i\in V^*$，$\boldsymbol{x}_i\in V$

$$\mathscr{A}(f^1\otimes f^2\otimes\cdots\otimes f^q)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_q) = \frac{1}{q!}\det\begin{bmatrix} \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_1\rangle_D & \cdots & \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_q\rangle_D \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f^q \mid \boldsymbol{x}_1\rangle_D & \cdots & \langle f^q \mid \boldsymbol{x}_q\rangle_D \end{bmatrix}$$

が成り立つ．$T^q(V^*)$ において，

$$S=\{f^1\otimes\cdots\otimes f^q \mid 1\leqq \exists i<j\leqq q,\ f^i=f^j\}$$

とする．$\sigma\in S_q=Aut(\{1, \cdots, q\})$ の定義を拡張して，$f^1, f^2, \cdots, f^q\in V^*$ に対し，

$$\sigma(f^1\otimes\cdots\otimes f^q)=f^{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes f^{\sigma^{-1}(q)}$$

で定義する．$\sigma\in Lin(T^q(V^*), T^q(V^*))$ である．このとき，

（ii）　$\forall F\in T^q(V^*)$ に対し，

$$F-(\mathrm{sgn}\,\sigma)\,\sigma(F)\in\langle S\rangle$$

（iii）　交代化写像 $\mathscr{A}: T^q(V^*)\to A^q(V^*)$ の核は

$$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{o})=\langle S\rangle$$

証明　（ i ）　［4］，(1.4.4) 参照．

（ii）　$F=f^1\otimes\cdots\otimes f^q$ としてよい．

（イ）　$\tau=(i, j)\in S_q$　$(i<j)$ のとき，

$$F-(\mathrm{sgn}\,\tau)\,\tau(F)$$
$$=(f^1\otimes\cdots\otimes f^i\otimes\cdots\otimes f^j\otimes\cdots\otimes f^q)$$
$$+(f^1\otimes\cdots\otimes f^j\otimes\cdots\otimes f^i\otimes\cdots\otimes f^q)$$
$$=\{f^1\otimes\cdots\otimes(f^i+f^j)\otimes\cdots\otimes(f^i+f^j)\otimes\cdots\otimes f^q\}$$
$$-\{f^1\otimes\cdots\otimes f^i\otimes\cdots\otimes f^i\otimes\cdots\otimes f^q\}$$
$$-\{f^1\otimes\cdots\otimes f^j\otimes\cdots\otimes f^j\otimes\cdots\otimes f^q\}\in\langle S\rangle \qquad \cdots①$$

(ロ) σ が m 個の互換の積のとき成り立つとする．$m=1$ のとき上記．

$\rho=\tau\sigma$ (τ は互換) とする．帰納法の仮定より，

$$F-(\mathrm{sgn}\,\sigma)\,\sigma(F)\in\langle S\rangle$$

である．

$$\tau\{F-(\mathrm{sgn}\,\sigma)\,\sigma(F)\}\in\tau\langle S\rangle\subseteqq\langle S\rangle$$
$$(\mathrm{sgn}\,\tau)\,\tau(F)-(\mathrm{sgn}\,\tau\sigma)\,\tau\sigma(F)\in\langle S\rangle \qquad \cdots②$$

よって，①と②より

$$F-(\mathrm{sgn}\,\rho)\,\rho(F)$$
$$=F-(\mathrm{sgn}\,\tau)\,\tau(F)+(\mathrm{sgn}\,\tau)\,\tau(F)-(\mathrm{sgn}\,\rho)\,\rho(F)\in\langle S\rangle$$

(iii) $F=f^1\otimes\cdots\otimes f^q\in S$，$\exists\, i<j$，$f^i=f^j$ ならば，(i) より，i 行と j 行が等しくなるので，$\mathscr{A}(F)=0$ である．

$$\therefore\quad S\subseteqq\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{o}),\qquad \langle S\rangle\subseteqq\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{o})$$

逆に，$F\in\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{o})$ とする．

$$\mathscr{A}(F)-F=\frac{1}{q\,!}\sum_{\sigma\in S_q}\{(\mathrm{sgn}\,\sigma)\,\sigma(F)-F\}\in\langle S\rangle$$
$$\therefore\quad -F=\mathscr{A}(F)-F\in\langle S\rangle$$

(証明終)

系 (0. 4. 9) $q\geqq 2$ とする．

$$S=\{f^1\otimes\cdots\otimes f^q \mid 1\leqq\exists\, i<j\leqq q,\ f^i=f^j\in V^*\}$$

を用いて

$$T^q(V^*)=A^q(V^*)\oplus\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{o})=A^q(V^*)\oplus\langle S\rangle$$

証明 線型写像 $\mathscr{A}: T^q(V^*)\to T^q(V^*)$ を用いて，

$$T^q(V^*)=\mathrm{Im}\,\mathscr{A}\oplus\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$$

を示せばよい．$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$ に注意する．

$\mathrm{Im}\,\mathscr{A}\cap\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\{\boldsymbol{o}\}$ なること：$\forall x=\mathscr{A}y\in\mathrm{Im}\,\mathscr{A}\cap\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$

$$x=\mathscr{A}y=\mathscr{A}^2y=\mathscr{A}x=\boldsymbol{o}, \qquad \therefore \quad \mathrm{Im}\,\mathscr{A}\cap\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\{\boldsymbol{o}\}$$

$T^q(V^*)=\mathrm{Im}\,\mathscr{A}+\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ なること：$\forall x\in T^q(V^*)$,

$y:=x-\mathscr{A}x$ とおけば，$\mathscr{A}y=\mathscr{A}x-\mathscr{A}^2x=\boldsymbol{o}$ だから，$y\in\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$

$$\therefore \quad x=\mathscr{A}x+y\in\mathrm{Im}\,\mathscr{A}+\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$$ （証明終）

§0.5 pベクトル（交代反変テンソル）$A^p(V)$，外積 $X\wedge Y$

これまで，アフィン線型空間 V を基にして，交代共変テンソル $f\in A^p(V^*)$ について考えた，$0\leqq p\leqq n=\dim V$（§4）.

定義（0.5.1）（i）V の位置に双対空間 V^* を置けば，線型空間

$$A^p(V^{**})=A^p(V)\subseteqq T^p(V)$$

を得る．$A^p(V)$ の元を**交代反変テンソル**または p **ベクトル**という．

$\dim A^p(V)={}_n\mathrm{C}_p$ であり，外積

$$A^p(V)\times A^q(V)\to A^{p+q}(V), \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mapsto \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$$

は双線型写像である（0.4.6）．$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p\in V$ のとき，

$$\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2\wedge\boldsymbol{x}_3=(\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{x}_3\otimes\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3\otimes\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2)$$
$$-(\boldsymbol{x}_3\otimes\boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_3\otimes\boldsymbol{x}_2)$$

一般に

$$\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_p=\sum_{\sigma\in Aut(\{1,\cdots,p\})}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma(p)}$$

である（0.4.7），（i）.

（ii） 基底列 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\in\mathscr{B}_V$ に対し，列

$$(\boldsymbol{b}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{b}_{i_p})_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n} \quad \text{（辞書式順序）}$$

は $A^p(V)$ の基底列である．これを $\boldsymbol{\varepsilon}$ に関する**標準基底**という．特に

$$A^n(V)=\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{b}_n$$

定理（0.5.2） アフィン線型空間 V，$p\geqq0$ において，$T^p(V^*)=T^p(V)^*$ と $T^p(V)$ との双対性を表す内積

$$T^p(V^*)\times T^p(V)\to\boldsymbol{R}, \qquad (F,\boldsymbol{X})\mapsto F(\boldsymbol{X})=\langle F\mid\boldsymbol{X}\rangle_T$$

を用いて（0.3.3），$F\in A^p(V^*)$ と $\boldsymbol{X}\in A^p(V)$ に対して，

$$\langle F\mid\boldsymbol{X}\rangle_p=\langle\boldsymbol{X}\mid F\rangle_p:=\frac{1}{p!}\langle F\mid\boldsymbol{X}\rangle_T$$

と置く．このとき

（i）$f^1, \cdots, f^p \in V^*$，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p \in V$ に対し

$$\langle f^1 \wedge \cdots \wedge f^p \mid \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p \rangle_p = \det \begin{bmatrix} \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle_D & \cdots & \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_p \rangle_D \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle_D & \cdots & \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_p \rangle_D \end{bmatrix}$$

が成り立つ．

（ii）$F \mapsto \langle F \mid \quad \rangle_p = \dfrac{1}{p!} \langle F \mid \quad \rangle_T$ により，$A^p(V^*) \cong (A^p(V))^*$

証明　（i）　$F := f^1 \wedge \cdots \wedge f^p$

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p = \sum_{\sigma \in Aut(\{1, \cdots, p\})} \mathrm{sgn}(\sigma) \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}$$

に対し，

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p) &= \sum \mathrm{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) \\ &= \sum \mathrm{sgn}(\sigma) f^1 \wedge \cdots \wedge f^p (\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) \end{aligned}$$

ところで，

$$\begin{aligned} &(f^1 \wedge \cdots \wedge f^p)(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) \\ &\qquad = \langle f^1 \wedge \cdots \wedge f^p \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(p)} \rangle_T \\ &\qquad = \det \begin{bmatrix} \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \rangle_D & \cdots & \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(p)} \rangle_D \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \rangle_D & \cdots & \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(p)} \rangle_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p) &= \sum \mathrm{sgn}(\sigma) \det \begin{bmatrix} \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \rangle_D & \cdots & \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(p)} \rangle_D \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \rangle_D & \cdots & \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_{\sigma(p)} \rangle_D \end{bmatrix} \\ &= p! \det \begin{bmatrix} \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle_D & \cdots & \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_p \rangle_D \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle_D & \cdots & \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_p \rangle_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

（証明終）

注意　（i）　$F \in A^p(V^*) \subseteqq T^p(V^*)$ と $\boldsymbol{X} \in A^p(V) \subseteqq T^p(V)$ に対し，2つの内積 $\langle F \mid \boldsymbol{X} \rangle_T$，$\langle F \mid \boldsymbol{X} \rangle_p$ が考えられる．

$$\langle F \mid \boldsymbol{X} \rangle_p = \frac{1}{p!} \langle F \mid \boldsymbol{X} \rangle_T$$

たとえば $f_i\in V^*$，$\boldsymbol{x}_j\in V$，$F=f^1\wedge\cdots\wedge f^p$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_p$ のとき $F\in T^p(V^*)$，$\boldsymbol{X}\in T^p(V)$ とみれば，

$$\langle F\mid\boldsymbol{X}\rangle_T=p!\,\det(\langle f^i\mid\boldsymbol{x}_j\rangle_D)_{1\leq i,j\leq p}$$

$F\in A^p(V)^*$，$\boldsymbol{X}\in A^p(V)$ とみれば，

$$\langle F\mid\boldsymbol{X}\rangle_p=\det(\langle f^i\mid\boldsymbol{x}_j\rangle_D)_{1\leq i,j\leq p}$$

である．

（ii）　当然のことながら，$p=1$ のとき，

$$V^*=A^p(V^*)=T^p(V^*),\qquad V=A^p(V)=T^p(V)$$

$$\langle\quad\mid\quad\rangle_p=\langle\quad\mid\quad\rangle_D=\langle\quad\mid\quad\rangle_T$$

である．

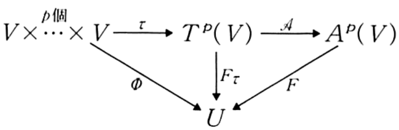
前に（0.4.4）　交代化作用素 $\mathscr{A}:T^p(V^*)\to A^p(V^*)$ を定義した．そこで V の位置に V^* をおけば，共変テンソルの交代化作用素

$$\mathscr{A}:T^p(V^{**})=T^p(V)\to A^p(V^{**})=A^p(V)$$

が考えられる．

定理（0.5.3）　V をアフィン線型空間，U を線型空間とする．このとき p 重線型写像 $\Phi\in Multlin(V\times\cdots\times V, U)$ が交代的ならば，

$$\exists_1\ \text{線型写像}\ F:A^p(V)=V\wedge\cdots\wedge V\to U,\qquad F\circ(\mathscr{A}\circ\tau)=\Phi$$



証明　F の<u>一意性</u>：テンソル積の普遍性により，

$\exists_1$ 線型写像 $F_T:T^p(V)\to U$，

$$F_T\circ\tau=\Phi\qquad\cdots①$$

が成り立つ．いま，求める F が存在したとすると，

$$(F\circ\mathscr{A})\circ\tau=F\circ(\mathscr{A}\circ\tau)=\Phi$$

が成り立つ．ゆえに，F_T の一意性によって，$F_T=F\circ\mathscr{A}$ が成り立つ．

$$\forall\boldsymbol{X}\in A^p(V)\ \text{に対し，}\ \mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X},$$

$$F(\boldsymbol{X})=F(\mathscr{A}(\boldsymbol{X}))=F_T(\boldsymbol{X})$$

$$\therefore \quad F = F_T \mid A^p(V)$$

となるから，F は一意的である．

F の存在：$F = F_T \mid A^p(V)$，すなわち

$$\boldsymbol{X} \in A^p(V), \quad F(\boldsymbol{X}) := F_T(\boldsymbol{X}),$$

と置く．ここで

$$\forall\, \boldsymbol{Y} \in T^p(V), \qquad (F \circ \mathscr{A})(\boldsymbol{Y}) = F_T(\boldsymbol{Y}) \qquad \cdots②$$

が成り立つことを示す．実際②を示すには，両辺の線型性より $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p$ としてよい．

$$\sigma \in Aut(\{1, \cdots, p\})$$

$$\begin{aligned} F_T(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) &= (F_T \circ \tau)(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) \\ &= \Phi(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) \\ &= (\mathrm{sgn}\,\sigma)\, \Phi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} (\text{②の左辺}) &= F(\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p)) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Aut(\{1, \cdots, p\})} (\mathrm{sgn}\,\sigma)\, F_T(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(p)}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in Aut(\{1, \cdots, p\})} \Phi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \\ &= \Phi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) = F_T(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p) \end{aligned}$$

ゆえに，②が成り立つ．次に

「$\forall\, (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \in V \times \cdots \times V$,

$$F \circ (\mathscr{A} \circ \tau)(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) = \Phi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \qquad \cdots③」$$

を示す．②より

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) &= F_T(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p) \\ &= F \circ \mathscr{A}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p) \\ &= (F \circ \mathscr{A} \circ \tau)(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \end{aligned}$$

$\therefore$　③が成り立つ．　(証明終)

系 (0.5.4)　V, W をアフィン線型空間，$f: V \to W$ を線型写像とする．このとき，$\exists_1$ 線型写像 $F: A^p(V) \to A^p(W)$,

$$F(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p) = f(\boldsymbol{x}_1) \wedge \cdots \wedge f(\boldsymbol{x}_p)$$

が成り立つ．F を $f\wedge\cdots\wedge f$ または $\bigwedge^p f$ で表す．

証明 p 重線型写像

$$\begin{array}{rcl} \Phi: V\times\cdots\times V & \to & U=A^p(W) \\ (\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p) & \mapsto & f(\boldsymbol{x}_1)\wedge\cdots\wedge f(\boldsymbol{x}_p) \end{array}$$

は交代的だから，

$$\exists_1 \text{線型写像 } F: A^p(V)=V\wedge\cdots\wedge V\to U, \qquad F\circ(\mathscr{A}\circ\tau)=\Phi$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_p)&=(F\circ(\mathscr{A}\circ\tau(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p))) \\ &=\Phi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p)=f(\boldsymbol{x}_1)\wedge\cdots\wedge f(\boldsymbol{x}_p) \end{aligned}$$

（証明終）

次に添字 (r,s) に関する縮約 $c^r_s: T^p{}_q(V)\to T^{p-1}{}_{q-1}(V)$ を交代テンソルに作用させることを考えよう．例から始める．

例（0.5.5） $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\in V$ を基底列，$\phi^1,\cdots,\phi^n\in V^*$ をその双対基底列とする．$\langle\boldsymbol{v}_i\mid\phi^j\rangle_D=\delta_{ij}$

（i） $p=q=2$ のとき，

（イ） $c^2_2\{(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2)\otimes(\phi^1\wedge\phi^2)\}$

$$\begin{aligned} &=c^2_2\{(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_1)\otimes(\phi^1\otimes\phi^2-\phi^2\otimes\phi^1)\} \\ &=c^2_2\{(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)\otimes(\phi^1\otimes\phi^2)-(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)\otimes(\phi^2\otimes\phi^1) \\ &\quad-(\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_1)\otimes(\phi^1\otimes\phi^2)+(\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_1)\otimes(\phi^2\otimes\phi^1)\} \end{aligned}$$

ここで $\langle\boldsymbol{v}_i\mid\phi^j\rangle_D=\delta_{ij}$ を用いて

$$\begin{aligned} &=\boldsymbol{v}_1\otimes\phi^1+\boldsymbol{v}_2\otimes\phi^2 \\ &\in A^1(V)\otimes A^1(V^*)=T^1(V)\otimes T^1(V^*)=V\otimes V^* \end{aligned}$$

（ロ） $\forall X\in A^2(V)$，$F\in A^2(V^*)$，

$$c^1_1c^2_2(\boldsymbol{X}\otimes F)=\langle\boldsymbol{X}\mid F\rangle_T=2!\langle\boldsymbol{X}\mid F\rangle_2 \quad (0.5.2)$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & c^1_1c^2_2\{(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2)\otimes(\phi^1\wedge\phi^2)\} \\ &=2!\langle\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\mid\phi^1\wedge\phi^2\rangle_2=2!\in\boldsymbol{R} \end{aligned}$$

（ii） $p=q=3$ のとき，

（イ） $c^3_3\{(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3)\otimes(\phi^1\wedge\phi^2\wedge\phi^3)\}$

$$\begin{aligned} &=c^3_3\{(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_3\otimes\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3\otimes\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2 \\ &\quad-\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_3\otimes\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3\otimes\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_1) \end{aligned}$$

$$\otimes(\phi^1\otimes\phi^2\otimes\phi^3+\phi^2\otimes\phi^3\otimes\phi^1+\phi^3\otimes\phi^1\otimes\phi^2$$
$$-\phi^2\otimes\phi^1\otimes\phi^3-\phi^1\otimes\phi^3\otimes\phi^2-\phi^3\otimes\phi^2\otimes\phi^1)\}$$
$$=(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_1)\otimes(\phi^1\otimes\phi^2-\phi^2\otimes\phi^1)$$
$$+(\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_3\otimes\boldsymbol{v}_2)\otimes(\phi^2\otimes\phi^3-\phi^3\otimes\phi^2)$$
$$+(\boldsymbol{v}_3\otimes\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_3)\otimes(\phi^3\otimes\phi^1-\phi^1\otimes\phi^3)$$
$$=(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2)\otimes(\phi^1\wedge\phi^2)$$
$$+(\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3)\otimes(\phi^2\wedge\phi^3)$$
$$+(\boldsymbol{v}_3\wedge\boldsymbol{v}_1)\otimes(\phi^3\wedge\phi^1)$$
$$\in A^2(V)\otimes A^2(V^*)$$

(ロ)　$c_2^2c_3^3(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3)\otimes(\phi^1\wedge\phi^2\wedge\phi^3)$

$$=c_2^2\{(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2)\otimes(\phi^1\wedge\phi^2)$$
$$+(\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3)\otimes(\phi^2\wedge\phi^3)$$
$$+(\boldsymbol{v}_3\wedge\boldsymbol{v}_1)\otimes(\phi^3\wedge\phi^1)\}$$
$$=(\boldsymbol{v}_1\otimes\phi^1+\boldsymbol{v}_2\otimes\phi^2)+(\boldsymbol{v}_2\otimes\phi^2+\boldsymbol{v}_3\otimes\phi^3)$$
$$+(\boldsymbol{v}_3\otimes\phi^3+\boldsymbol{v}_1\otimes\phi^1)$$
$$=2!(\boldsymbol{v}_1\otimes\phi^1+\boldsymbol{v}_2\otimes\phi^2+\boldsymbol{v}_3\otimes\phi^3)$$
$$\in A^1(V)\otimes A^1(V^*)=T^1(V)\otimes T^1(V^*)=V\otimes V^*$$

(ハ)　$\forall \boldsymbol{X}\in A^2(V)$, $F\in A^2(V^*)$,

$$c_1^1c_2^2c_3^3(\boldsymbol{X}\otimes F)=\langle \boldsymbol{X}\mid F\rangle_T=3!\langle \boldsymbol{X}\mid F\rangle_3 \qquad (0.5.2)$$

$$\therefore\quad c_1^1c_2^2c_3^3\{(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3)\otimes(\phi^1\wedge\phi^2\wedge\phi^3)\}$$
$$=3!\langle\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3\mid\phi^1\wedge\phi^2\wedge\phi^3\rangle_3=3!\in\boldsymbol{R}$$

一般に縮約 c_p^p: $T^p{}_p(V)\to T^{p-1}{}_{p-1}(V)$ を考えよう．

命題 (0.5.6)　$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\in V$ を基底列，$\phi^1, \cdots, \phi^n\in V^*$ をその双対基底列，$p>0$ とする．このとき

(i)　縮約 c_p^p: $T^p{}_p(V)\to T^{p-1}{}_{p-1}(V)$ を部分空間 $A^p(V)\otimes A^p(V^*)\subseteqq T^p{}_p(V)$ に制限したものは，線型写像

$$A^p(V)\otimes A^p(V^*)\to A^{p-1}(V)\otimes A^{p-1}(V^*)$$

を引き起こし

$$c_p^p\{(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_p)\otimes(\phi^1\wedge\cdots\wedge\phi^p)\}$$

$$=\sum_{1\leqq k\leqq p}(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{v}}_k\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_p)\otimes(\phi^1\wedge\cdots\wedge\hat{\phi}^k\wedge\cdots\wedge\phi^p)$$

（ii）　p 個の縮約 c^r_r：$T^r{}_r(V)\to T^{r-1}{}_{r-1}(V)$，$1\leqq r\leqq p$ の合成写像 $c=c^1_1\cdots c^p_p$ を部分空間 $A^p(V)\otimes A^p(V^*)\subseteqq T^p{}_p(V)$ に制限したものは線型写像

$$A^p(V)\otimes A^p(V^*)\to\boldsymbol{R}$$

を引き起こし，

$$\forall\boldsymbol{X}\in A^p(V),\quad F\in A^p(V^*),$$

$$c(\boldsymbol{X}\otimes F)=\langle\boldsymbol{X}\mid F\rangle_T$$

$$=p!\langle\boldsymbol{X}\mid F\rangle_p$$

$$c\{(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_p)\otimes(\phi^1\wedge\cdots\wedge\phi^p)\}=p!$$

証明　$S_p:=Aut(\{1,\cdots,p\})$

$$\boldsymbol{X}:=(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_p)\otimes(\phi^1\wedge\cdots\wedge\phi^p)$$

$$=(\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p)})\otimes(\sum_{\tau\in S_p}\mathrm{sgn}(\tau)\,\phi^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes\phi^{\tau(p)})$$

（i）

$$\langle\phi^{\tau(p)}\mid\boldsymbol{v}_{\sigma(p)}\rangle_D=\delta_{\sigma(p)}{}^{\tau(p)}$$

であるから，

$$c^p_p\{(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p)})\otimes(\phi^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes\phi^{\tau(p)})\}$$

$$=\delta_{\sigma(p)}{}^{\tau(p)}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p-1)})\otimes(\phi^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes\phi^{\tau(p-1)})$$

$$\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{v}}_k\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_p$$

$$=\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{k-1}\wedge\boldsymbol{v}_{k+1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_p$$

$$=\sum_{\sigma\in S_p,\sigma(k)=k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(k-1)}\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_p,\sigma\theta_k(k)=k}\mathrm{sgn}(\sigma\theta_k)\,\boldsymbol{v}_{\sigma\theta_k(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma\theta_k(k-1)}\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma\theta_k(k+1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma\theta_k(p)}$$

ただし $\theta_k=(k,p,p-1,p-2,\cdots,k+1)$

$$=\sum_{\sigma\in S_p,\sigma(p)=k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\theta_k)\,\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(k-1)}\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(k)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p-1)}$$

である．したがって

$$c^p_p(\boldsymbol{X})=\sum_{\sigma\in S_p,\tau\in S_p}\sum\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)\,c^p_p\{(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p)})\otimes(\phi^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes\phi^{\tau(p)})\}$$

$$=\sum_{\sigma,\tau}\sum\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)\,\delta_{\sigma(p)}{}^{\tau(p)}\{(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p-1)})\otimes(\phi^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes\phi^{\tau(p-1)})\}$$

$$=\sum_{1\leqq k\leqq p}\ \sum_{\sigma,\tau\in S_p}\ \sum_{\sigma(p)=k,\tau(p)=k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)\{(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{\sigma(p-1)})$$

$$\otimes(\phi^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes\phi^{\tau(p-1)})\}$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq p} \sum_{\sigma \in S_p, \sigma(p)=k} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\theta_k)(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{\sigma(p-1)})$$

$$\otimes \sum_{\tau \in S_p, \tau(p)=k} \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\theta_k)(\phi^{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \phi^{\tau(p-1)})$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq p} (\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\boldsymbol{v}}_k \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_p) \otimes (\phi^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\phi}^k \wedge \cdots \wedge \phi^p)$$

（ii）　$c(\boldsymbol{X} \otimes F) = \langle \boldsymbol{X} \mid F \rangle_T$ (0.3.8) と $\langle \boldsymbol{X} \mid F \rangle_T = p! \langle \boldsymbol{X} \mid F \rangle_p$ (0.5.2) による．　(証明終)

注意　これまでに多くの内積が現れた．ここで復習しておこう．アフィン線型空間 V とその双対線型空間 $V^* = Lin(V, \boldsymbol{R})$ を定めたとき，

（i）　V と V^* の双対性を表す内積

$$\langle \quad | \quad \rangle_D$$

$f \in V^*$，$\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\langle f \mid \boldsymbol{x} \rangle_D$

（ii）　$T_p(V) = \otimes^p V^*$ と $T^p(V) = V^p$ の双対性を表す内積

$$\langle \quad | \quad \rangle_T$$

$T = f^1 \otimes \cdots \otimes f^p \in T_p(V)$ と $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p \in T^p(V)$ に対し

$$\langle T \mid \boldsymbol{X} \rangle_T = f^1(\boldsymbol{x}_1) \cdots f^p(\boldsymbol{x}_p)$$

$$= \langle f^1 \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle_D \cdots \langle f^p \mid \boldsymbol{x}_p \rangle_D$$

（iii）　$A^p(V^*)$ と $A^p(V)$ の双対性を表す内積

$$\langle \quad | \quad \rangle_p$$

$F \in A^p(V^*) \subseteqq T^p(V^*)$ と $\boldsymbol{X} \in A^p(V) \subseteqq T^p(V)$ に対し，

$$\langle F \mid \boldsymbol{X} \rangle_p = \frac{1}{p!} \langle F \mid \boldsymbol{X} \rangle_T$$

である．当然のことながら，$p=1$ のとき，

$$V^* = A^p(V^*) = T^p(V^*), \qquad V = A^p(V) = T^p(V)$$

$$\langle \quad | \quad \rangle_D = \langle \quad | \quad \rangle_p = \langle \quad | \quad \rangle_T$$

である．

（iv）　$T^p{}_q(V) = (\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V^*)$

と $T^q{}_p(V) = (\otimes^q V) \otimes (\otimes^p V^*)$ の双対性を表す内積

$$\langle \quad | \quad \rangle_T$$

がある．

第1章　Minkowski 線型空間

$m=n+q$ 次元の線型空間 V と V 上の符号 (n,q) の2階の反変対称テンソル $g: V\times V\to \boldsymbol{R}$ の組 (V,g) を $\underline{(n,q)\text{型の}}$一般 Minkowski 線型空間という．$q=1$ のときが Minkowski 線型空間である．

Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ に対し，非斉次 Lorentz 群 $\boldsymbol{P}_V$，斉次 Lorentz 群 $L(V^{(n,1)})$，固有斉次 Lorentz 群 $L^{+}(V^{(n,1)})$ が考えられる．さらに $V^{(n,1)}$ は空間的にも時間的にも向きが付けられ，順時斉次 Lorentz 群 $L^{\uparrow}(V^{(n,1)})$，制限斉次 Lorentz 群 $L^{\uparrow}(V^{(n,1)})\cap L^{+}(V^{(n,1)})$ が考えられる．

未来ベクトルの概念が重要である．

$f\in Map(V^{(n,1)}, V^{(n,1)})$ について次の3つは同値である．

(1)　$\exists\, \boldsymbol{g}\in L(V^{(n,1)})$，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{o})$

(2)　$f\in \boldsymbol{P}_V$ すなわち f は非斉次 Lorentz 変換

(3)　$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V$,

$$\langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{o}) \mid f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{o})\rangle_M=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$$

「§1.5　双対 Minkowski 線型空間」は始めはとばしてもよい．Minkowski 線型空間 $(V^{(n,1)}, \mathcal{U}_{+}^{\uparrow})$ からその双対空間 $(V^{(n,1)})^*$ への自然写像

$$\mu: V^{(n,1)}\to (V^{(n,1)})^*, \qquad \boldsymbol{a}\mapsto \boldsymbol{a}^*=\langle \boldsymbol{a} \mid -\rangle_M$$

による基底列 $(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_m)\in \mathcal{U}_{+}^{\uparrow}$ の像 $(\boldsymbol{e}_0{}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_m{}^*)$ は双対基底列ではなく，$(-\boldsymbol{e}_0{}^*, \boldsymbol{e}_1{}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_m{}^*)$ の方が双対基底列である．$(V^{(n,1)})^*$ の時間的向きは $\boldsymbol{e}_0{}^*$ が未来ベクトルであるように定める (1.4.10)．すなわち

$$(\boldsymbol{e}_0{}^*, \boldsymbol{e}_1{}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_m{}^*)\in \mathcal{U}_{+}^{\uparrow}$$

である．そこで自然同型 $\mu: (V^{(n,1)}, \mathcal{U}_{+}^{\uparrow})\cong((V^{(n,1)})^*, \mathcal{U}_{+}^{\uparrow})$ は順時的である．本章の参考文献：

[4]　有馬・浅枝：ベクトル場と電磁場

[7]　Greub：Multilinear Algebra

[12]　Parrott：Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry

§1.1　一般 Minkowski 線型空間 $V^{(n,q)}$

命題（1.1.1）　V を m 次元の線形空間，$f: V\times V\to \boldsymbol{R}$ を反変対称テンソルとする．このとき $\exists q, n$ $(q+n\leqq m)$．

（i）　∃ 基底列 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$,

$$f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)=0 \qquad (i\neq j)$$
$$f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i)=-1 \qquad (1\leqq i\leqq q)$$
$$f(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j)=1 \qquad (q+1\leqq j\leqq q+n)$$

したがって，$\forall \boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}x^i\boldsymbol{b}_i$，$\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{m}y^j\boldsymbol{b}_j$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=-(x^1y^1+\cdots+x^qy^q)+(x^{q+1}y^{q+1}+\cdots+x^{q+n}y^{q+n})$$

（ii）　n, q は列 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ の取り方によらない．

証明　（i）　∀ 基底列 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ をとり，$a_{ij}=f(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$，$A=(a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq m}$ と置く．行列 A は対称だから，∃ 正則行列 P,

$$^tPAP=\begin{bmatrix} -I_q & & \\ & I_n & \\ & & O \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{rank}\, A=n+q\leqq m$$

が成り立つ（[3]，(9.2.9)）．

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)P$$

と置くと

$$\boldsymbol{x}=\sum x'^i\boldsymbol{b}_i=\sum x^i\boldsymbol{a}_i,\quad \boldsymbol{y}=\sum y'^j\boldsymbol{b}_j=\sum y^j\boldsymbol{a}_j \text{ に対し，}$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} y'^1 \\ \vdots \\ y'^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})&=(x^1, \cdots, x^m)A\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \\ &=(x'^1, \cdots, x'^m)\,^tPAP\begin{bmatrix} y'^1 \\ \vdots \\ y'^m \end{bmatrix} \\ &=-x'^1y'^1-\cdots-x'^qy'^q+x'^{q+1}y'^{q+1}+\cdots+x'^{q+n}y'^{q+n} \end{aligned}$$

（ii）　Sylvester の慣性法則 [3]，(9.2.9) 参照．　　　　　　　　　　（証明終）

定義（1.1.2）（i）$\mathrm{sgn}(f):=(n,q)$ を f の**符号**という．$q+n\leqq m$

（ii）m 次元の線型空間 V と，V 上の符号 (n,q) の 2 階の反変対称テンソル $g: V\times V\to \boldsymbol{R}$ の組 (V,g) を (n,q) 型の**擬 Euclid 線型空間**または**一般 Minkowski 線型空間**という．ただし $n+q=m$ と仮定する．

一般には $0\leqq n\leqq m$ でもよいが，多くの場合断りなしに $1\leqq n\leqq m-1$ とする．$q=0$ の場合は Euclid 線型空間にほかならない．g を V の**計量テンソル**という．$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M$ とかく．

$$\langle \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\mid \boldsymbol{y}\rangle_M=\langle \boldsymbol{x}_1\mid \boldsymbol{y}\rangle_M+\langle \boldsymbol{x}_2\mid \boldsymbol{y}\rangle_M,$$
$$\langle \lambda\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M=\lambda\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M$$
$$\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2\rangle_M=\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}_1\rangle_M+\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}_2\rangle_M,$$
$$\langle \boldsymbol{x}\mid \lambda\boldsymbol{y}\rangle_M=\lambda\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M$$
$$\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_j\in V,\quad \lambda\in\boldsymbol{R}$$

が成り立つ．$\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**擬 Euclid 内積**，簡単に**内積**という．

$(V,\langle\ \mid\ \rangle_M)$ を $V^m{}_{n,q}$, $V^{(n,q)}$ などと表す．

（iii）V の基底列 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ が

$$\langle \boldsymbol{e}_i\mid \boldsymbol{e}_i\rangle_M=-1\qquad(1\leqq i\leqq q)$$
$$\langle \boldsymbol{e}_j\mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M=1\qquad(q+1\leqq j\leqq m)$$
$$\langle \boldsymbol{e}_i\mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M=0\qquad(i\neq j)$$

を満たすとき，このことを

$$\langle \boldsymbol{e}_i\mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M=\pm\delta_{ij}$$

と表し，列 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ を $V^{(n,q)}$ の**正規直交基底列**という．このとき，
$\boldsymbol{x}=\sum x^i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{y}=\sum y^j\boldsymbol{e}_j$ に対し

$$\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M=-(x^1y^1+\cdots+x^qy^q)+(x^{q+1}y^{q+1}+\cdots+x^my^m)$$

が成り立つ．$V=V^{(n,q)}$ の正規直交基底列の全体を $\mathcal{U}_V$ または $\mathcal{U}$ で表す．

$\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M=0$ が成り立つとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交**するといい，

$$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$$

で表す．

命題（1.1.3）m 次元の一般 Minkowski 線型空間 $(V,\langle\ \mid\ \rangle_M)$ において，$\boldsymbol{x}\in V$ に対し，「$\forall\boldsymbol{y}\in V, \langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{y}\rangle_M=0$」ならば，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$$

である．

証明 正規直交基底列 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ を取り，$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_m\boldsymbol{e}_m$ と表す．そのとき，

$$\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_j \rangle_M = \pm\delta_{ij}$$

より，

$$\pm x_i = \langle x_i\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i \rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_i \rangle_M = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$$ (証明終)

命題（1.1.4） $(V, \langle \ \mid \ \rangle_M)$ を m 次元の一般Minkowski線型空間，$1 \leqq p$ とする．そのとき p 階の共変テンソルの空間 $T^p(V)$ において，双線型写像 $f : T^p(V) \times T^p(V) \to \boldsymbol{R}$，$(A, B) \to \langle A \mid B \rangle_T$ を

$$\langle \boldsymbol{a}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_p \rangle_T = \langle \boldsymbol{a}_1 \mid \boldsymbol{b}_1 \rangle_M \cdots \langle \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_p \rangle_M$$

$$\boldsymbol{a}_i, \ \boldsymbol{b}_j \in V \qquad \cdots ①$$

により定めれば，$(T^p(V), \langle \ \mid \ \rangle_T)$ は一般 Minkowski 空間となる．

証明 双線型写像 f が well-defined である（条件①により定まる）こと：

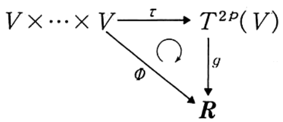
写像

$$\Phi : (V \times \cdots \times V) \times (V \times \cdots \times V) \to \boldsymbol{R}$$

$$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p) \qquad \mapsto \langle \boldsymbol{a}_1 \mid \boldsymbol{b}_1 \rangle_M \cdots \langle \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_p \rangle_M$$

は $2p$ 重線型であるから，テンソル積の普遍性より，

$$\exists g : T^{2p}(V) \to \boldsymbol{R}, \qquad \Phi = g \circ \tau$$



が成り立つ．

$$g(\boldsymbol{a}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_p \otimes \boldsymbol{b}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_p)$$

$$= \Phi(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p) = \langle \boldsymbol{a}_1 \mid \boldsymbol{b}_1 \rangle_M \cdots \langle \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_p \rangle_M$$

そこで，写像

$$h : T^p(V) \times T^p(V) \to T^p(V) \otimes T^p(V) = T^{2p}(V)$$

$$(A, B) \qquad \mapsto A \otimes B$$

を考えれば，$f=g\circ h$ を得る．

$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ が V の正規直交基底列であれば，

$$\langle \boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{j_p}\rangle_T=\pm\delta_{(i_1,\cdots,i_p)(j_1,\cdots,j_p)}$$

が成り立つ．したがって

$$(\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_p})_{1\leqq i_1,i_2,\cdots,i_p\leqq m}\quad (\text{適当な順序})$$

は $T^p(V)$ の正規直交基底列となり，$T^p(V)$ は一般 Minkowski 線型空間である．　　（証明終）

定理（1.1.5）　m 次元の一般 Minkowski 空間 $(V,\langle\ \mid\ \rangle_M)$ と $1\leqq p\leqq m$ に対し，p 階の交代反変テンソルの空間 $A^p(V)\subseteqq T^p(V)$ を考える．

$$A, B\in A^p(V) \text{ に対し，} \langle A\mid B\rangle_p:=\frac{1}{p!}\langle A\mid B\rangle_T$$

と置けば，

（i）　$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p\in V$ に対し

$$\langle \boldsymbol{a}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{b}_p\rangle_p$$
$$=\det\begin{bmatrix}\langle\boldsymbol{a}_1\mid\boldsymbol{b}_1\rangle_M & \cdots & \langle\boldsymbol{a}_1\mid\boldsymbol{b}_p\rangle_M\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\boldsymbol{a}_p\mid\boldsymbol{b}_1\rangle_M & \cdots & \langle\boldsymbol{a}_p\mid\boldsymbol{b}_p\rangle_M\end{bmatrix}$$

（ii）　$(A^p(V),\langle\ \mid\ \rangle_p)$ は一般 Minkowski 線型空間であって，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ が V の正規直交基底列ならば，

$$(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p})_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq m}\quad (\text{適当な順序})$$

は $A^p(V)$ の正規直交基底列となる．

$$\langle \boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_p}\rangle_p$$
$$=\det\begin{bmatrix}\langle\boldsymbol{e}_{i_1}\mid\boldsymbol{e}_{j_1}\rangle_M & \cdots & \langle\boldsymbol{e}_{i_1}\mid\boldsymbol{e}_{j_p}\rangle_M\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\boldsymbol{e}_{i_p}\mid\boldsymbol{e}_{j_1}\rangle_M & \cdots & \langle\boldsymbol{e}_{i_p}\mid\boldsymbol{e}_{j_p}\rangle_M\end{bmatrix}=\pm\delta_{(i_1,\cdots,i_p)(j_1,\cdots,j_p)}$$

（iii）　$p=m$ のとき，$A^m(V)=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_m$

$$\langle \boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_m \mid \boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_m\rangle_m=(-1)^q$$

（iv）　$p=m-1$ のとき $E_i=\boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{e}}_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_m\in A^{m-1}(V)$ と置くと，

$$E_1, \cdots, E_m\quad (\text{適当な順序})$$

は $A^{m-1}(V)$ の正規直交基底列であって

$$\langle E_i \mid E_j \rangle_{m-1} = (-1)^q \langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_j \rangle_M$$

証明　(i)　$\langle \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_p \rangle_p$

$$= \frac{1}{p!} \langle \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_p \rangle_M$$

$$= \frac{1}{p!} \langle \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{\sigma(p)} \mid \sum_\xi \mathrm{sgn}(\xi) \boldsymbol{b}_{\xi(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_{\xi(p)} \rangle_T$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_\xi \mathrm{sgn}(\xi) \langle \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{\sigma(p)} \mid \boldsymbol{b}_{\xi(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_{\xi(p)} \rangle_T$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \sum \mathrm{sgn}(\xi) \langle \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \mid \boldsymbol{b}_{\xi(1)} \rangle_M \cdot \cdots \cdot \langle \boldsymbol{a}_{\sigma(p)} \mid \boldsymbol{b}_{\xi(p)} \rangle_M$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \det \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \mid \boldsymbol{b}_1 \rangle_M & \cdots & \langle \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \mid \boldsymbol{b}_p \rangle_M \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{a}_{\sigma(p)} \mid \boldsymbol{b}_1 \rangle_M & \cdots & \langle \boldsymbol{a}_{\sigma(p)} \mid \boldsymbol{b}_p \rangle_M \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{a}_1 \mid \boldsymbol{b}_1 \rangle_M & \cdots & \langle \boldsymbol{a}_1 \mid \boldsymbol{b}_p \rangle_M \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_1 \rangle_M & \cdots & \langle \boldsymbol{a}_p \mid \boldsymbol{b}_p \rangle_M \end{bmatrix}$$

(ii)　$f(X \mid Y) = \langle X \mid Y \rangle_p$ と置けば，写像 $f : A^p(V) \times A^p(V) \to \boldsymbol{R}$ は双線型である．V の正規直交基底列 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ に対し

$$(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p})_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m}$$

は $A^p(V)$ の基底であって

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_p})$$

$$= \langle \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_p} \rangle_p$$

$$= \det \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_{i_1} \mid \boldsymbol{e}_{j_1} \rangle_M & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_{i_1} \mid \boldsymbol{e}_{j_p} \rangle_M \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_{j_1} \rangle_M & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_{j_p} \rangle_M \end{bmatrix}$$

$$= \pm \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_p j_p} = \pm \delta_{(i_1, \cdots, i_p)(j_1, \cdots, j_p)}$$

が成り立つ．したがって $(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p})_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m}$ は $A^p(V)$ の正規直交基底であって，$A^p(V)$ は一般 Minkowski 線型空間である．

(iii) と (iv) は容易．　　　　(証明終)

定義（1.1.6）　$(n, 1)$ 型または $(1, n)$ 型の一般 Minkowski 線型空間を単に **Minkowski 線型空間**といい，内積を **Minkowski 内積**という．$(n, 1)$ 型の

Minkowski 線型空間 $(V^{(n,1)}, f)$ を $V^{(n,1)}$, ${V^{n+1}}_M$ または V_M と表す．

系 (1.1.7)　$V^{(n,1)}$ を $m=n+1$ 次元の Minkowski 線型空間，$1 \leqq p \leqq m-1=n$, $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) \in \mathcal{U}$ とする．このとき

(i)　$A^p(V)$ は $\left(\binom{n}{p}, \binom{n}{p-1}\right)$ 型の一般 Minkowski 線型空間である．

$$\langle \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \rangle_p = -1 \quad (2 \leqq i_2 < \cdots < i_p \leqq m)$$

$$\langle \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \mid \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \rangle_p = 1 \quad (2 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m)$$

(ii)　特に，$A^n(V)$ は $(1, n)$ 型の Minkowski 線型空間である．

$$\langle \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_m \mid \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_m \rangle_n = 1$$

$$\langle \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_m \mid \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_m \rangle_n = -1 \quad (2 \leqq i \leqq m)$$

証明　$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$, $m-1=n$ と (1.1.5) による．(証明終)

命題と定義 (1.1.8)　$(V, \langle\ \mid\ \rangle_M)$, $(W, \langle\ \mid\ \rangle_M)$ を 2 つの一般 Minkowski 線型空間とする．

(i)　線型写像 $f: V \to W$ が，

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ \langle f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{y}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M$$

を満たすならば，f は単射である，特に

(ii)　f が全射ならば，f は同型写像である．このとき，f を**計量同型**であるという．計量同型が存在するとき

$$(V, \langle\ \mid\ \rangle_M) \cong (W, \langle\ \mid\ \rangle_M)$$

のように表す．

証明　(i)　$\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ とする．このとき $\forall \boldsymbol{y} \in V$, $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = \langle f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{y}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{o} \mid f(\boldsymbol{y}) \rangle_M = 0$

ゆえに (1.1.3) により，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$　　(証明終)

補題 (1.1.9)　(i)　$(V, \langle\ \mid\ \rangle_M)$ が (n, q) 型の一般 Minkowski 線型空間のとき，V は自然な仕方で双対空間 $V^* = Lin(V, \boldsymbol{R})$ と同型である (0.1.4)．すなわち，$\boldsymbol{a} \in V$ に対し，写像 $\mu(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^*: V \to \boldsymbol{R}$ を，

$$\forall \boldsymbol{x} \in V,\ \ \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x}) := \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M$$

によって定義するとき，

（ｉ）　$\mu(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}^*$ は線型写像，すなわち $\boldsymbol{a}^*\in V^*$ である．

（ii）　$\mu: V\cong V^*$ は同型写像である．

（iii）　このとき，V の正規直交基底列

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q, \boldsymbol{e}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$$

の双対基底列は

$$(-\mu(\boldsymbol{e}_1), \cdots, -\mu(\boldsymbol{e}_q), \mu(\boldsymbol{e}_{q+1}), \cdots, \mu(\boldsymbol{e}_m))$$
$$=(-\boldsymbol{e}_1^*, \cdots, -\boldsymbol{e}_q^*, \boldsymbol{e}_{q+1}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_m^*)$$

である．

（iv）　V^* において $f=\mu(\boldsymbol{x})$，$g=\mu(\boldsymbol{y})\in V^*$ の内積を

$$\langle f \mid g\rangle_M := \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$$

と定義すれば，$(V^*, \langle\ \mid\ \rangle_M)$ もまた (n, q) 型の一般 Minkowski 線型空間となる．V の正規直交基底列 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q, \boldsymbol{e}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ に対し，

$$(\boldsymbol{e}_1^*, \cdots, \boldsymbol{e}_q^*, \boldsymbol{e}_{q+1}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_m^*)$$

は V^* の正規直交基底列である．写像 μ は単なる同型ではなく，計量同型

$$(V, \langle\ \mid\ \rangle_M)\cong(V^*, \langle\ \mid\ \rangle_M)$$

である．

証明　（ｉ）　$\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x})=\langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M$ は $\boldsymbol{x}$ について線型だから，$\boldsymbol{a}^*\in V^*$ である．

（ii）　$\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x})=\langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M$ が $\boldsymbol{a}$ について線型なることより，μ は準同型写像である．内積 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$ の定義の条件より符号 $\mathrm{sgn}(f)=(n, q)$，$n+q=\dim V$ だから，μ は単射である．さらに

$$\dim V=\dim V^*=m$$

だから，μ は全射である．

（iii）　$(\mu(\boldsymbol{e}_i))(\boldsymbol{e}_i)=\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i\rangle_M=-1\quad(1\leqq i\leqq q)$

$$\therefore\quad(-\mu(\boldsymbol{e}_i))(\boldsymbol{e}_i)=1\quad(1\leqq i\leqq q)$$

また

$$(\mu(\boldsymbol{e}_j))(\boldsymbol{e}_j)=\langle \boldsymbol{e}_j \mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M=1\quad(q+1\leqq j\leqq m)$$
$$(\mu(\boldsymbol{e}_i))(\boldsymbol{e}_j)=\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M=0\quad(i\neq j)$$

が成り立つ．

（iv）　$\langle f \mid g\rangle_M=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M=\langle \mu^{-1}f \mid \mu^{-1}g\rangle_M$ が双線型になることは μ^{-1} の線型性による．$\boldsymbol{e}_i^*=\mu(\boldsymbol{e}_i)$ だから，

$$\langle \boldsymbol{e}_i{}^* \mid \boldsymbol{e}_i{}^* \rangle_M = \langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i \rangle_M = -1 \quad (1 \leqq i \leqq q)$$
$$\langle \boldsymbol{e}_j{}^* \mid \boldsymbol{e}_j{}^* \rangle_M = \langle \boldsymbol{e}_j \mid \boldsymbol{e}_j \rangle_M = 1 \quad (q+1 \leqq j \leqq m)$$
$$\langle \boldsymbol{e}_i{}^* \mid \boldsymbol{e}_j{}^* \rangle_M = \langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_j \rangle_M = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つ．　(証明終)

注意　μ が単射したがって全単射なることは次のようにしてもわかる．

$\mu(\boldsymbol{a})=0$ ならばすべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $0=\langle \mu(\boldsymbol{a}) \mid \mu(\boldsymbol{x}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a}=0$$

§1.2　斉次 Lorentz 群 $L(V^{(n,q)})$

定義と命題（1.2.1）　一般 Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,q)}$ において，

（i）　線型写像 $f: V \to V$ が

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \qquad \langle f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{y}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M$$

を満たすとき，f を**斉次 Lorentz 変換**という．簡単に **Lorentz 変換**ともいう．Lorentz 変換の全体

$$L(V^{(n,q)}) = \{ f \in Lin(V, V) \mid \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \; \langle f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{y}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M \}$$

は群をなす．これを**斉次 Lorentz 群**という．簡単に **Lorentz 群**ともいう．

（ii）　線型写像 $f: V \to V$ について

$$f \in L(V^{(n,q)}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in V,\ \langle f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{x}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M$$

が成り立つ．

証明（i）「$f, g \in L(V^{(n,q)}) \Rightarrow g \circ f \in L(V^{(n,q)})$」は当然．「$f \in L(V^{(n,q)}) \Rightarrow f^{-1} \in L(V^{(n,q)})$」となること：(1.1.8) より f は単射，したがって全単射であって，逆写像 $g=f^{-1} \in GL(V)$ をもつ．

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，$\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{v})$ と表す．

$$\begin{aligned} \langle g(\boldsymbol{x}) \mid g(\boldsymbol{y}) \rangle_M &= \langle g(f(\boldsymbol{u})) \mid g(f(\boldsymbol{v})) \rangle_M \\ &= \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v} \rangle_M = \langle f(\boldsymbol{u}) \mid f(\boldsymbol{v}) \rangle_M \\ &= \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M \end{aligned}$$

$$\therefore \quad g=f^{-1} \in L(V^{(n,q)})$$

（ii）（⇒）は当然．

（⇐）$2\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle_M - \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M - \langle \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M$ による．

（証明終）

例（1. 2. 2）　$m=q+n$ 項列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^m$ において

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}$$

に対し，

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = -(x^1y^1+\cdots+x^qy^q)+(x^{q+1}y^{q+1}+\cdots+x^my^m)$$

と置けば $(\boldsymbol{R}^m, \langle \ \mid \ \rangle_M)$ は (n, q) 型の一般 Minkowski 線型空間である．これを

$$\boldsymbol{R}^{(n,q)} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{R}^m_{n,q}$$

と表す．

$$\boldsymbol{g}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{g}_q=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g}_{q+1}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{g}_m=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と置くと，$\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m$ は $\boldsymbol{R}^m_{n,q}$ の正規直交基底である．これを $\boldsymbol{R}^m_{n,q}$ の**自然基底**という．

$$G := (-\boldsymbol{g}_1, \cdots, -\boldsymbol{g}_q, \boldsymbol{g}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{g}_m) = \begin{bmatrix} -I_q & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

と置けば $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = (x^1, \cdots, x^m)G\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}$

である．$\boldsymbol{R}^{(n,q)}$ の斉次 Lorentz 群 $L(\boldsymbol{R}^{(n,q)})$ を行列の群と見るときは，これを $O(n, q)$ で表す．

$$O(n, q) := \{A \in GL(m, \boldsymbol{R}) \mid \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m, \ \langle A\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{y} \rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M\}$$

Lorentz 変換を表す行列 $A \in O(n, q)$ を**擬直交行列**という．

$$\begin{array}{ccc} Lin(\boldsymbol{R}^{(n,q)}, \boldsymbol{R}^{(n,q)}) & \cong & \boldsymbol{R}^m_m \\ \cup & & \cup \\ GL(\boldsymbol{R}^{(n,q)}) & \cong & GL(m, \boldsymbol{R}) \\ \cup & & \cup \\ L(\boldsymbol{R}^{(n,q)}) & \cong & O(n, q) \end{array}$$

命題（1.2.3）　行列

$$A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q, \boldsymbol{a}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\in GL(m, \boldsymbol{R})$$

について，つぎのことが成り立つ．

（i）　$${}^tAGA=(\langle \boldsymbol{a}_i \mid \boldsymbol{a}_j\rangle_M)_{1\leq i,j\leq m}$$

（ii）　次の3条件は互いに同値である．

(1)　$A\in O(n, q)$　　(2)　${}^tAGA=G$，特に $\det A=\pm 1$

(3)　列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\in \boldsymbol{R}^m$ は $\boldsymbol{R}^m_{n,q}$ の正規直交基底列である．

証明　（i）

$$\boldsymbol{a}_i=\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, \qquad 1\leqq i\leqq m$$

とする．

$$(x_{ij})={}^tAGA=\begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -I_q & \\ & I_n \end{bmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{q1} & a_{q+1\,1} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1q} & \cdots & a_{qq} & a_{q+1\,q} & \cdots & a_{mq} \\ a_{1\,q+1} & \cdots & a_{q\,q+1} & a_{q+1\,q+1} & \cdots & a_{m\,q+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{qm} & a_{q+1\,m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1q} & -a_{1\,q+1} & \cdots & -a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{q1} & \cdots & -a_{qq} & -a_{q\,q+1} & \cdots & -a_{qm} \\ a_{q+1\,1} & \cdots & a_{q+1\,q} & a_{q+1\,q+1} & \cdots & a_{q+1\,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mq} & a_{m\,q+1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

と置けば

$$x_{ij}=-\left(\sum_{k=1}^{q}a_{ki}a_{kj}\right)+\sum_{k=q+1}^{m}a_{ki}a_{kj}=\langle \boldsymbol{a}_i \mid \boldsymbol{a}_j\rangle_M$$

（ii）　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{R}^m$，$(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}):={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}$ と置く．

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M={}^t\boldsymbol{x}G\boldsymbol{y}={}^t(G\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=(G\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})$$

$$\langle A\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{y}\rangle_M={}^t\boldsymbol{x}{}^tAGA\boldsymbol{y}=({}^tAGA\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})$$

(1)⇒(2)　$$(({}^tAGA-G)\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})=({}^tAGA\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})-(G\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})$$

$$=\langle A\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{y}\rangle_M-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M=0$$

$$\therefore \quad {}^tAGA-G=O$$

(1)⇐(2)　${}^tAGA=G$ のとき，

$$\langle A\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{y}\rangle_M = ({}^tAGA\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = (G\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$$

(2)⇔(3)　(i)より，${}^tAGA=G \iff \langle \boldsymbol{a}_i \mid \boldsymbol{a}_j\rangle_M = \pm\delta_{ij}$　　(証明終)

行列式が1の擬直交行列を**固有な擬直交行列**といい，その全体を $O^+(n, q)$ または $SO(n, q)$ で表す．

$$O^+(n, q) = SO(n, q) := \{A \in O(n, q) \mid \det A = 1\}$$

定義（1.2.4）　X を集合とする．$S(X)$ を X から X の全単射の全体とする．$S(X)$ は自然に群をなし，X の**変換群**という．G を群とし，その単位元を e とする．

（i）　G が X に**左から作用する**

$\iff$　∃ 写像 $G \times X \to X$，$(g, x) \mapsto gx$

(1)　$\forall g, h \in G$，$\forall x \in X$，$(gh)x = g(hx)$

(2)　$\forall x \in X$，$ex = x$

$\iff$　∃ 準同型 $\lambda : G \to S(X)$

$$g \mapsto \lambda(g) = (x \mapsto gx)$$

さらに，「$\forall x, y \in X$，$\exists g \in G$，$gx = y$」が成り立つとき，この作用は**可遷的**または**推移的**であるという．また，λ が単射であることを，**忠実**であるという．「$\forall x \in X$，$\{g \in G \mid gx = x\} = \{e\}$」が成り立つとき，作用 λ は**自由**であるという．自由ならば忠実であるが，この逆は一般には成立しない．

（ii）　G が X に**右から作用する**

$\iff$　∃ 写像 $X \times G \to X$，$(x, g) \mapsto xg$

(1)　$\forall g, h \in G$，$\forall x \in X$，$x(gh) = (xg)h$

(2)　$\forall x \in X$，$xe = x$

$\iff$　∃ 反準同型 $\rho : G \to S(X)$

$$g \mapsto \rho(g) = (x \mapsto xg)$$

$$\therefore \quad \rho(gh) = \rho(h)\rho(g)$$

右からの作用が**可遷的**，**忠実**，**自由**の定義は，左からの作用のときと同様である．さらにこのとき，

（iii）　　$g \in G$，$x \in X$ に対し，$gx := \rho(g^{-1})(x)$

と置けば，これにより G は X に左から作用する．なぜなら

$$
\begin{aligned}
(gh)x &= \rho((gh)^{-1})(x) = \rho(h^{-1}g^{-1})(x) \\
&= (\rho(g^{-1})\rho(h^{-1}))(x) \\
&= \rho(g^{-1})(\rho(h^{-1})(x)) \\
&= \rho(g^{-1})(hx) = g(hx)
\end{aligned}
$$

だからである．

忠実であって自由でない例

$$X=\{(x, y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1\}：\text{円板}$$

$$G：X \text{ の原点中心の回転群}$$

$$\mu：G\to S(X)\ (\text{natural})\ \text{とすると}$$

$$
\begin{array}{ccc}
G & \cong & \boldsymbol{R} \\
\Cup & & \Cup \\
g & \leftrightarrow & g \text{ の回転角}
\end{array}
$$

とみて $\mathrm{Ker}(\mu)\cong 2\pi\boldsymbol{Z}$

$$
\begin{array}{l}
\lambda：\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z} \cong G/\mathrm{Ker}(\mu) \hookrightarrow S(X) \\
\qquad\quad \| \\
\quad\ [0, 2\pi)
\end{array}
$$

となり，λ は忠実な作用である．

一方，これは自由でない．なぜなら $x=(0, 0)\in X$（原点）について

$$\forall g\in G,\quad g(0, 0)=(0, 0).$$

例題（1.2.5）　V を m 次元のアフィン線型空間，$GL(V)$ を V の正則一次変換の全体，$\mathcal{B}_V$ を V の基底列の全体，

$$S(\mathcal{B}_V) := (\mathcal{B}_V \text{ から } \mathcal{B}_V \text{ への全単射の全体})$$

とする．このとき写像

$$GL(m, \boldsymbol{R}) \hookrightarrow S(\mathcal{B}_V),\ A \mapsto \rho(A) := (\varepsilon \mapsto \varepsilon A)$$

が単射は当然であるが，さらに ρ は群の反準同型写像である．すなわち，群 $GL(m, \boldsymbol{R})$ は集合 $\mathcal{B}_V$ に右から作用する．ただし，

$$A=(a_{ij}),\qquad \varepsilon=(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$$

に対し

$$
\begin{aligned}
\rho(A)(\varepsilon) &= \varepsilon A = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A \\
&:= (\textstyle\sum \boldsymbol{u}_j a_{j1}, \cdots, \sum \boldsymbol{u}_j a_{jm})
\end{aligned}
$$

と置く．

解 (i) $\varepsilon=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$，$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})\in GL(m,\boldsymbol{R})$ に対し，$\varepsilon B=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m)$，$(\varepsilon B)A=(\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_m)$，$BA=(c_{ij})$ と置けば，

$$\boldsymbol{b}_k=\sum_{1\leq k\leq m}\boldsymbol{u}_jb_{jk},\quad \boldsymbol{c}_i=\sum_{1\leq k\leq m}\boldsymbol{b}_ka_{ki},\quad c_{ij}=\sum_{1\leq k\leq m}b_{ik}a_{kj}$$

$$\varepsilon(BA)=(\textstyle\sum\boldsymbol{u}_jc_{j1},\cdots,\sum\boldsymbol{u}_jc_{jm})$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j\leq m}\boldsymbol{u}_jc_{ji}&=\sum_{1\leq j\leq m}\boldsymbol{u}_j\left(\sum_{1\leq k\leq m}b_{jk}a_{ki}\right)\\&=\sum_{1\leq k\leq m}\left(\sum_{1\leq j\leq m}\boldsymbol{u}_jb_{jk}\right)a_{ki}\\&=\sum_{1\leq k\leq m}\boldsymbol{b}_ka_{ki}=\boldsymbol{c}_i\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \varepsilon(BA)=(\varepsilon B)A$$

$$\begin{aligned}\rho(BA)(\varepsilon)&=(\varepsilon B)A=\rho(A)\{\rho(B)(\varepsilon)\}\\&=\{\rho(A)\rho(B)\}(\varepsilon)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \rho(BA)=\rho(A)\rho(B)$$

$$\therefore\quad \rho : GL(m,\boldsymbol{R})\to S(\mathcal{B}_V)\ \text{は反準同型}$$

である．

命題と定義 (1.2.6) $V=V^{(n,q)}$ とし，$f: V\to V$ を線型写像とする．$\varepsilon=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m)$ を V の1つの正規直交基底列とし，ε に関する f の表現行列を $M_\varepsilon(f)$，すなわち

$$(f(\boldsymbol{e}_1),\cdots,f(\boldsymbol{e}_m))=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m)M_\varepsilon(f)$$

とする．V の正則一次変換の全体の群を $GL(V)$ とする．このとき同型写像 $GL(V)\cong GL(m,\boldsymbol{R})$，$f\mapsto M_\varepsilon(f)$ により

(i) $L(V^{(n,q)})\cong O(n,q)$

(ii) $\det M_\varepsilon(f)$ は，$\varepsilon=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m)\in\mathcal{U}_V$ の取り方によらず，f のみにより定まる．それを $\det(f)$ であらわす．

$$\det(f):=\det M_\varepsilon(f)$$

証明 (i) $A=M_\varepsilon(f)$，$V\ni\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^m x^i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^m y^i\boldsymbol{e}_i$，$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^m x'^i\boldsymbol{e}_i$，$f(\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^m y'^i\boldsymbol{e}_i$ とするとき，

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y'^1 \\ \vdots \\ y'^m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}$$

だから，行列 $G=\begin{pmatrix} -I_q & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$ を用いて，

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = (x^1, \cdots, x^m) G \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}$$

$$\langle f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{y}) \rangle_M = (x^1, \cdots, x^m)\, {}^t\! AGA \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}$$

である．したがって $f \in GL(V)$ に対し

$$f \in L(V^{(n,q)}) \quad \Leftrightarrow \quad \langle f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{y}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M$$

$$\Leftrightarrow (x^1, \cdots, x^m)\, {}^t\! AGA \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} = (x^1, \cdots, x^m) G \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^t\! AGA = G \Leftrightarrow A \in O(n, q)$$

（ii） 別の基底列 εT, $T \in O(n, q)$ に関する f の表現行列は，

$$T^{-1} A T$$

となる．

$$\therefore \quad \det T^{-1} A T = \det A$$

（証明終）

$\det f = 1$ なる Lorentz 変換 f を**固有な Lorentz 変換**という．その全体を**固有斉次 Lorentz 群**といい，L^+ または $L^+(V^{(n,q)})$ で表す．

$$L^+ = L^+(V^{(n,q)}) = \{ f \in L(V^{(n,q)}) \mid \det f = 1 \}$$

また

$$L^- := \{ f \in L(V^{(n,q)}) \mid \det f = -1 \}$$

と置く．

$$L(V^{(n,q)}) = L^+ \cup L^-, \quad L^+ \cap L^- = \varnothing$$

復習（1.2.7） m 次元のアフィン線型空間 V において，基底列の全体を $\mathcal{B}$ または $\mathcal{B}_V$ で表す．このとき，$\forall (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m), (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathcal{B}_V$ に対し

$$\exists A \in \boldsymbol{R}^m_m, \ \det A \neq 0, \ (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) A$$

が成り立つ．そこで，$\det A>0$ のとき

$$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \sim (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$$

と書けば，$\sim$ は同値関係であって，基底列の全体 $\mathcal{B}_V$ は2つの部分集合に

$$\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2, \qquad \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$$

と類別される（[4] p. 37, p. 42, §2.2の問題4参照）．そこで，$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ の一方を**正の**基底列の集合 $\mathcal{B}^+$，他方を**負の**基底列の集合 $\mathcal{B}^-$ と定めた．そのとき，V を**有向アフィン線型空間**などといった．今後は断らなくても，**アフィン線型空間**と言えば，有向アフィン線型空間を意味する．

記号（1.2.8）（i）アフィン線型空間 $V=V^{(n,q)}$ といえば，約束により V は有向アフィン線型空間であるが，そのことを強調して V を**有向 Minkowski 線型空間** $(V^{(n,q)}, \mathcal{B}^+)$ ともいう．V の基底列の全体を $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$ で，正規直交基底列の全体を $\mathcal{U} = \mathcal{U}_V$ で表した．正の正規直交基底列の全体 $\mathcal{B}^+ \cap \mathcal{U}$ を $\mathcal{U}^+$ で，負の正規直交基底列全体 $\mathcal{B}^- \cap \mathcal{U}$ を $\mathcal{U}^-$ で表す．基底列

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m),\ (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathcal{B} \text{ が}\textbf{同じ向き} \\
&\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \sim (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) \\
&\Leftrightarrow \exists A \in GL(m, \boldsymbol{R}),\ \det A > 0 \\
&\quad (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) A
\end{aligned}$$

と定義する．

（ii）群 $O(n,q)$ は集合 $\mathcal{U}$ に可遷的かつ自由に右から作用する．

$$\mathcal{U}_V = \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-, \qquad \mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^- = \emptyset$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) \in \mathcal{U}_V \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_j \rangle = \pm \delta_{ij}$$

$$\forall (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m),\ (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m) \in \mathcal{U}_V,\ \ \exists_1 A \in O(n,q)$$

$$(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) A,\ \ \det A = \pm 1$$

が成り立ち（1.2.3），$\det A=1$ すなわち $A \in O^+(n,q)$ のとき

$$(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m) \sim (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$$

である．$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) \in \mathcal{U}^+$ のとき，$(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m) \in \mathcal{U}$ に対し

$$(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m) \in \mathcal{U}^+ \Leftrightarrow \boldsymbol{f}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{f}_m = \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_m$$

$$(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m) \in \mathcal{U}^- \Leftrightarrow \boldsymbol{f}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{f}_m = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_m$$

定義（1.2.9）Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において，必ずしも線型で

ない写像 $f: V\to V$ が

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V,\quad \langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}) \mid f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\rangle_M=\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle_M$$

を満たすとき，f を**非斉次 Lorentz 変換**ともいう．非斉次 Lorentz 変換の全体

$$\boldsymbol{P}_V=\boldsymbol{P}_V(V):=\{f\in Map(V, V) \mid \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V,\ \langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}) \mid f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\rangle_M=\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle_M\}$$

は群をなす（次の（1.2.10）の(2)⇒(3)⇒(1)による）．そこで群 $\boldsymbol{P}_V$ を**非斉次 Lorentz 群**または**全 Poincare 群**ともいう．

命題（1.2.10）　Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において，$\forall f\in Map(V, V)$ について，次の(1)(2)(3)は同値である．

(1)　f はアフィン変換であって，しかも

$$\exists \boldsymbol{g}\in L(V^{(n,1)}),\quad \boldsymbol{b}=f(\boldsymbol{o})\in V,\quad f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}$$

(2)　非斉次 Lorentz 変換 $f\in \boldsymbol{P}_V$

(3)　$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V$,

$$\langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{o}) \mid f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{o})\rangle_M=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$$

証明　(1)⇒(2)：$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

$$\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle_M=\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle_M$$

より当然．

(2)⇒(3)：f が非斉次 Lorentz 変換，すなわち

$$\langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}) \mid f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\rangle_M=\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle_M$$

を満たすとする．

$$-2\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle_M=\langle \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\rangle_M-\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\rangle_M-\langle \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w}\rangle_M$$

に注意する．$\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{o})$，$\boldsymbol{w}=f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{o})$ と置けば，

$$\begin{aligned}
-2\langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{o}) \mid f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{o})\rangle_M&=-2\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle_M\\
&=\langle \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\rangle_M-\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\rangle_M-\langle \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w}\rangle_M\\
&=\langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}) \mid f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\rangle_M\\
&\quad-\langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{o}) \mid f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{o})\rangle_M\\
&\quad-\langle f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{o}) \mid f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{o})\rangle_M\\
&=\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle_M-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M-\langle \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M\\
&=-2\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M
\end{aligned}$$

(3)⇒(1)：　　$b := f(o),\ \ g(x) := f(x) - b$

と置く．$g \in L(V^{(n,1)})$ なることを示せばよい．仮定によって，

$$\langle g(x) \mid g(y) \rangle_M = \langle x \mid y \rangle_M \quad (\text{計量保存}) \qquad \cdots ①$$

が成り立つから，g が線型写像なることをいえばよい．

$$(e_0, e_1, \cdots, e_n) \in \mathcal{U}$$
$$\Rightarrow (g(e_0), g(e_1), \cdots, g(e_n)) \in \mathcal{U} \qquad \cdots ②$$

が成り立つ（①による）．これより，

$$「\forall w, \langle g(w) \mid v \rangle_M = 0」 \Rightarrow 「\forall i\ (0 \leqq i \leqq n),\ \langle g(e_i) \mid v \rangle_M = 0」$$
$$\Rightarrow v = o \quad (②による) \qquad \cdots ③$$

$$\langle g(w) \mid g(\lambda x + \mu y) - \lambda g(x) - \mu g(y) \rangle_M$$
$$= \langle g(w) \mid g(\lambda x + \mu y) \rangle_M - \lambda \langle g(w) \mid g(x) \rangle_M - \mu \langle g(w) \mid g(y) \rangle_M$$
$$= \langle w \mid \lambda x + \mu y \rangle_M - \lambda \langle w \mid x \rangle_M - \mu \langle w \mid y \rangle_M \quad (①を用いた)$$
$$= \langle w \mid \lambda x + \mu y \rangle_M - \langle w \mid \lambda x + \mu y \rangle_M = 0$$

であるから，③より

$$g(\lambda x + \mu y) - \lambda g(x) - \mu g(y) = o$$
$$g(\lambda x + \mu y) = \lambda g(x) + \mu g(y)$$

となって，g は線型写像である．$g \in L(V)$　　　　（証明終）

例（1.2.11）　Minkowski 線型空間 $V = V^{(n,1)}$ において，

（i）　写像 $f \in Map(V, V)$ が線型の場合には，

$$f \in P_V \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in V,\ \langle f(x) \mid f(x) \rangle_M = \langle x \mid x \rangle_M$$

である．すなわち集合 $Map(V, V)$ において，

$$L(V^{(n,1)}) = GL(V^{(n,1)}) \cap P_V = Lin(V, V) \cap P_V$$

である．

（ii）　$R \ni \lambda \neq 0$，λ 倍 $f : V^{(n,1)} \to V^{(n,1)}$，$x \mapsto \lambda x$ については

$$f \in P_V \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

命題（1.2.12）　Minkowski 線型空間 $V = V^{(n,1)}$ において

（i）　平行移動の全体 T は全 Poincare 群 P_V の正規部分群である．

$$V \cong T \subseteqq P_V \subseteqq G_A^m = (V \text{ から } V \text{ へのアフィン同型写像の全体})$$

（ii）　写像 $\sigma : P_V \to GL(V)$，$(f, \boldsymbol{f}) \mapsto \boldsymbol{f}$ により

$$P_V / T \cong L(V)$$

証明　(i)　$\boldsymbol{a}\in V$, $f_a\in \boldsymbol{T}$ はアフィン変換としては (f_a, I_V) に他ならない．

$$\boldsymbol{V}\cong \boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{a}\leftrightarrow (f_a, I_V)$$

$$f_a(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a}, \qquad f_a(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{a},$$

$$f_a(\boldsymbol{q})-f_a(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$$

だから，

$$\langle f_a(\boldsymbol{q})-f_a(\boldsymbol{p}) \mid f_a(\boldsymbol{q})-f_a(\boldsymbol{p})\rangle_M=\langle \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}\rangle_M$$

$$\therefore \quad f_a\in \boldsymbol{P}_V$$

(ii)　Ker $\sigma=\boldsymbol{T}$ であって，σ の像は $\sigma(\boldsymbol{P}_V)=L(V)$ だから，

$$\boldsymbol{P}_V/\boldsymbol{T}\cong L(V), \qquad (f, \boldsymbol{f})\mapsto \boldsymbol{f}$$

（証明終）

§1.2 の練習問題

問題 1.　$V=V^m{}_{n,q}$ とする．

(i)　$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ を V の 1 つの正規直交基底列，$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ を V の必ずしも正規直交ではない他の基底列とする．P を基底変換の変換行列，すなわち

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)=(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)P, \quad P\in GL(m, \boldsymbol{R})$$

とする．このとき

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)\text{ が正規直交基底列} \quad \Leftrightarrow \quad P\text{ が擬直交行列}$$

(ii)　写像 $\mathcal{U}_V\times O(n, q)\to \mathcal{U}_V$　$(\varepsilon, A)\mapsto \varepsilon A$ によって，擬直交行列の群 $O(n, q)$ は正規直交基底列の集合 $\mathcal{U}_V$ に右から自由に作用する．

答

1.　(i)

$$P=\begin{bmatrix} p^1{}_1 & \cdots & p^1{}_m \\ \vdots & & \vdots \\ p^m{}_1 & \cdots & p^m{}_m \end{bmatrix}=[\boldsymbol{p}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_m]$$

とすると，

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{e}_1p^1{}_i+\cdots+\boldsymbol{e}_mp^m{}_i=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{e}_kp^k{}_i, \quad 1\leqq i\leqq m$$

であるから，

$$\langle \boldsymbol{b}_i \mid \boldsymbol{b}_j\rangle_M=\sum_{1\leqq k,l\leqq m}\langle \boldsymbol{e}_k \mid \boldsymbol{e}_l\rangle_M p^k{}_ip^l{}_j$$

$$=-\sum_{k=1}^{q}p^k{}_ip^k{}_j+\sum_{k=q+1}^{m}p^k{}_ip^k{}_j=\langle \boldsymbol{p}_i \mid \boldsymbol{p}_j\rangle_M$$

である．ゆえに

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathcal{U}_V \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{b}_i \mid \boldsymbol{b}_j \rangle_M = \pm \delta_{ij} \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{p}_i \mid \boldsymbol{p}_j \rangle_M = \pm \delta_{ij} \\
&\Leftrightarrow \quad P \in O(n, q)
\end{aligned}
$$

(ii)　$\forall \varepsilon \in \mathcal{U}_V$，$A, B \in O(n, q)$ に対し $\varepsilon A \in \mathcal{U}_V$ であって，

(1)　$\varepsilon(AB) = (\varepsilon A)B$

(2)　単位行列 $E \in O(n, q)$ に対し $\varepsilon E = \varepsilon$

§1.3　時間性ベクトル T

定義（1.3.1）　$n+1$ 次元の Minkowski 線型空間 $V = V^{(n,1)}$ において，$\boldsymbol{x} \in V$ に対し

(i)　$\boldsymbol{x}$ が**時間性**　$\Leftrightarrow$　$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M < 0$

(ii)　$\boldsymbol{x}$ が**空間性**　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}^M$　または　$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M > 0$

(iii)　$\boldsymbol{x}$ が**光ベクトル**または**光性**である　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}^M$　かつ　$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M = 0$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}^M$　かつ　$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{x}$

と定義する．

T =(時間性ベクトルの全体)，　　$\mathscr{C}$ =(光ベクトルの全体)=(Light Cone)

S=(空間性ベクトルの全体)

と置く．$\mathscr{C} \subseteqq V$ を**光円錐**という．明らかに

$$
V = T \cup \mathscr{C} \cup S, \quad T \cap \mathscr{C} = \emptyset, \quad \mathscr{C} \cap S = \emptyset, \quad S \cap T = \emptyset
$$

が成り立つ．

V_M の正規直交基底列 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を定めたとき，$\boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{e}_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \in V$ に対し，$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M = -{x_0}^2 + \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ であるから

$$
\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M \leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad {x_0}^2 \geqq \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2
$$

が成り立つ．したがって

(i)　$\boldsymbol{x} \in T$　$\Leftrightarrow$　${x_0}^2 > \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$　　$\therefore$　$x_0 \neq 0$

(ii)　$\boldsymbol{x} \in S$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}^M$　または　${x_0}^2 < \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$

(iii)　$\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}$　$\Leftrightarrow$　$0\neq x_0{}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2$

と言い換えてもよい．

たとえば，$\boldsymbol{e}_0$ は時間性，$t\neq 0$ のとき $t\boldsymbol{e}_0$ も時間性．

$$\because\quad \langle t\boldsymbol{e}_0 \mid t\boldsymbol{e}_0\rangle_M=-t^2<0$$

また $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$ は空間性．

$$\because\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}^M \text{ のとき } \langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2>0$$

さらにまた，$\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{e}_i$　$(1\leqq i\leqq n)$ は光性である．

$$\begin{aligned}\because\quad \langle\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{e}_i\mid\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{e}_i\rangle_M&=\langle\boldsymbol{e}_0\mid\boldsymbol{e}_0\rangle_M+\langle\boldsymbol{e}_1\mid\boldsymbol{e}_1\rangle_M\\&=-1+1=0\end{aligned}$$

命題（1.3.2）　$\boldsymbol{p}\in V=V^{(n,1)}$ が時間性のとき，$\boldsymbol{x}\in V$ に対し

$$\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{x} \text{ は空間性.}$$

証明　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}^M$ のとき当然，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}^M$ とする．$(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\in\mathscr{U}_V$

$$\boldsymbol{p}=p_0\boldsymbol{e}_0+\sum_{i=1}^{n}p_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{x}=x_0\boldsymbol{e}_0+\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$$

とするとき，$\boldsymbol{p}\in T$ より $p_0{}^2>\sum_{i=1}^{n}p_i{}^2$，$p_0\neq 0$ である．$\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{x}$ より

$$0=\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=-p_0x_0+\sum_{i=1}^{n}p_ix_i,$$

$$p_0x_0=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$

ここで，$\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\neq 0$（仮に $x_1=\cdots=x_n=0$ ならば，$p_0x_0=0$，$x_0=0$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}^M$ となって矛盾）

$$\begin{aligned}p_0{}^2x_0{}^2&=\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^2\\&\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}p_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\right)<p_0{}^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\right)\end{aligned}$$

そこで $p_0{}^2\neq 0$ で割って

$$x_0{}^2<\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2$$ （証明終）

注意　上の命題の逆は真でない．たとえば，$V=V^{(3,1)}$ において，$(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,$

$e_3)\in\mathcal{U}_V$ のとき，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_0\in T$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_0+2\boldsymbol{e}_1$ は

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M=\langle \boldsymbol{e}_0 \mid \boldsymbol{e}_0\rangle_M+4\langle \boldsymbol{e}_1 \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M=3>0$$

より，$\boldsymbol{x}$ は空間性であるが，$\langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M=-1\neq 0$ であって $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{p}$ でない．

補題（1.3.3）　V を $n+1$ 次元の線型空間，$f: V\times V\to\boldsymbol{R}$ を反変対称テンソル，$\boldsymbol{p}\in V$，$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})\neq 0$ とする．このとき

（i）　$W=\{\boldsymbol{x}\in V \mid f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})=0\}$ は V の部分線型空間であって，

$$\dim W=n$$

（ii）　$V=\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\oplus W$　（直和）

証明　（i）　$\sigma(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$ と置く．$\sigma: V\to\boldsymbol{R}$ は，全射線型写像であって，$W=\mathrm{Ker}(\sigma)$ である．よって

$$n+1=\dim V=\dim\mathrm{Ker}(\sigma)+\dim\mathrm{Im}(\sigma)=\dim W+1$$

$$\therefore\quad \dim W=n$$

（ii）　$V=\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}+W$ なること．$\forall\boldsymbol{x}\in V$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\dfrac{\sigma(\boldsymbol{x})}{\sigma(\boldsymbol{p})}\boldsymbol{p}$ と置くと

$$\sigma(\boldsymbol{y})=\sigma(\boldsymbol{x})-\frac{\sigma(\boldsymbol{x})}{\sigma(\boldsymbol{p})}\sigma(\boldsymbol{p})=0,\quad \therefore\quad \boldsymbol{y}\in\mathrm{Ker}(\sigma)=W,$$

$$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}+W$$

$\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\cap W=\{0\}$ なることは $\boldsymbol{p}\notin W$ により明らか．　（証明終）

定理（1.3.4）　Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において，時間性の $\boldsymbol{p}\in V$ に対し，

$$V^T(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{p},\qquad V^S(\boldsymbol{p})=\{\boldsymbol{p}\}^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in V \mid \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{p}\}$$

と置くとき，

（i）　$V=V^T(\boldsymbol{p})\oplus V^S(\boldsymbol{p})$，

$$\dim V^T(\boldsymbol{p})=1,\qquad \dim V^S(\boldsymbol{p})=n$$

（ii）　$\forall\boldsymbol{x}\in V^S(\boldsymbol{p})$ は空間性である．

証明　（i）　$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$ に対し，（1.3.3）を適用すればよい．

（ii）　（1.3.2）による．　（証明終）

例（1.3.5）　$V=V^{(3,1)}$，$(\boldsymbol{e}_o,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\in\mathcal{U}_V$

（i）　$\langle \boldsymbol{e}_0 \mid \boldsymbol{e}_0\rangle_M=-1$，$\boldsymbol{e}_0$ は時間性，$\boldsymbol{e}_0\perp\boldsymbol{e}_i$ $(1\leqq i\leqq 3)$ だから

$V^S(\boldsymbol{e}_o)\ni\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ であって，これらは一次独立

$$V^S(\boldsymbol{e}_0)=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_3$$

(ii)　$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{e}_1$,

$$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{p}\rangle_M=4\langle\boldsymbol{e}_0\mid\boldsymbol{e}_0\rangle_M+\langle\boldsymbol{e}_1\mid\boldsymbol{e}_1\rangle_M=-3$$

よって，$\boldsymbol{p}$ は時間性

$$\boldsymbol{x}=x_0\boldsymbol{e}_0+\sum x_i\boldsymbol{e}_i\in V^S(\boldsymbol{p})\quad\Leftrightarrow\quad 0=\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=-2x_0+x_1$$

$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=x_0\boldsymbol{e}_0+(2x_0)\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

$$=x_0(\boldsymbol{e}_0+2\boldsymbol{e}_1)+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\therefore\quad V^S(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_0+2\boldsymbol{e}_1)+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_3$$

定義（1.3.6）　Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において

(i)　$V\ni\boldsymbol{p}$ が時間性，すなわち $\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{p}\rangle_M<0$ のとき

$$\|\boldsymbol{p}\|_T:=\sqrt{-\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{p}\rangle_M}$$

を $\boldsymbol{p}$ の**時間的長さ**という．

(ii)　$V\ni\boldsymbol{a}$ が空間性，すなわち $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}^M$ または $\langle\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}\rangle_M>0$ のとき

$$\|\boldsymbol{a}\|_S:=\sqrt{\langle\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}\rangle_M}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**空間的長さ**という．

定理（1.3.7）　$V=V^{(n,1)}$ を Minkowski 線型空間，$\boldsymbol{p}\in V$ を時間性とする．このとき $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|_T}=\dfrac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{-\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{p}\rangle_M}}$ もまた時間性であって，$\|\boldsymbol{e}\|_T=1$ である．$\boldsymbol{p}$ による直和分解

$$V=V^T(\boldsymbol{p})\oplus V^S(\boldsymbol{p})$$

において

(i)　$V^T(\boldsymbol{p})=V^T(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}$ は

$$\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_T:=-\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M,\ \|\boldsymbol{x}\|_T=\sqrt{\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle_T}=\sqrt{-\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M}$$

を内積として，1次元の Euclid 線型空間となる．

$$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{y}=y\boldsymbol{e}\in V^T(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\ \text{に対し，}\ \langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_T=xy$$

(ii)　$V^S(\boldsymbol{p})=V^S(\boldsymbol{e})=\{\boldsymbol{p}\}^\perp$ は

$$\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_S:=\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M,\qquad \|\boldsymbol{x}\|_S=\sqrt{\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle_S}=\sqrt{\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M}$$

を内積として，n 次元の Euclid 線型空間となる．

証明　$\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{e}\rangle_M=\left\langle\dfrac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|_T}\,\middle|\,\dfrac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|_T}\right\rangle_M=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{p}\|_T{}^2}\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{p}\rangle_M$

$$=-1$$

$$\therefore\quad \|e\|_T=\sqrt{-\langle e \mid e\rangle_M}=\sqrt{1}=1$$

（i） $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V^S(\boldsymbol{p})$，$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_T=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$ が共変対称テンソルであることは当然．$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{y}=y\boldsymbol{e}$ に対し

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_T=-\langle x\boldsymbol{e} \mid y\boldsymbol{e}\rangle_M=-xy\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M=xy$$

$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_T=x^2\geqq 0$ であって，$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_T=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}^M$

（ii） $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_S=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$ が共変対称テンソルであることは当然．

$\boldsymbol{x}\in V^S(\boldsymbol{p})$ は空間性だから，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}^M$ または

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_S=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M>0$$

である．$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_S\geqq 0$ であって，

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_S=0 \quad\Leftrightarrow\quad \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}^M$$

（証明終）

定義（1.3.8） $\boldsymbol{e}\in V=V^{(n,1)}$ が時間性，$\|\boldsymbol{e}\|_T=1$ のとき，任意の $\boldsymbol{x}\in V=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\oplus V^S(\boldsymbol{e})$ は

$$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^S,\quad x\in\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{x}^S\in V^S(\boldsymbol{e})$$

と表され，写像

$$Obs_{\boldsymbol{e}}:\ V\to\boldsymbol{R}\times V^S(\boldsymbol{e}),\quad \boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^S\mapsto(x, \boldsymbol{x}^S)$$

は全単射である．この写像を $\boldsymbol{e}$ による **Minkowski 分解**という．

$Obs_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x})=(x, \boldsymbol{x}^S)$，$Obs_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{y})=(y, \boldsymbol{y}^S)$ とすると

（i） $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M=-xy+\langle \boldsymbol{x}^S \mid \boldsymbol{y}^S\rangle_S$，

$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M=-x^2+\|\boldsymbol{x}^S\|_S{}^2$

（ii） $x=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M$，

$$\because\quad \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M=x\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M+\langle \boldsymbol{x}^S \mid \boldsymbol{e}\rangle_M=-x+0$$

（iii） $\boldsymbol{x}$ が時間性 $\Leftrightarrow$ $0>\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M=-x^2+\|\boldsymbol{x}^S\|_S^2$

$\Leftrightarrow$ $|x|>\|\boldsymbol{x}^S\|_S$

（iv） $\boldsymbol{x}$ が空間性 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}^M$ または $0<\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M$

$\Leftrightarrow$ $|x|=\|\boldsymbol{x}^S\|_S=0$ または $|x|<\|\boldsymbol{x}^S\|_S$

（v） $\boldsymbol{x}$ が光性 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}^M$ かつ $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M=0$

$\Leftrightarrow$ $|x|=\|\boldsymbol{x}^S\|_S\neq 0$

§1.3 の練習問題

問題 1.　$V=V^{(n,1)}$，Lorentz 変換 $f: V\to V$ は，時間性ベクトルを時間性ベクトルに移す．すなわち $f(T)=T$ である．

答

1.　$\boldsymbol{p}\in T \quad\Rightarrow\quad \langle f(\boldsymbol{p})\mid f(\boldsymbol{p})\rangle_M=\langle \boldsymbol{p}\mid \boldsymbol{p}\rangle_M<0$

$\qquad\qquad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{p})\in T \qquad \therefore\quad f(T)\subseteqq T$

また $g=f^{-1}\in L(V^{(n,1)})$ と置けば，$fg=1_V$，$g(T)\subseteqq T$ だから，

$$T=fg(T)\subseteqq f(T),$$

$$\therefore\quad T\subseteqq f(T),\qquad f(T)=T$$

§1.4　未来ベクトル $T_U^{\downarrow}$・順時斉次 Lorentz 群 $L^{\uparrow}(V^{(n,1)})$

定理（1.4.1）　Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において

$$T=(\text{時間性ベクトルの全体})=\{\boldsymbol{x}\in V\mid \langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\rangle_M<0\}$$

を考える．$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T$ について

（i）$\langle \boldsymbol{a}\mid \boldsymbol{b}\rangle_M\neq 0$ が成り立つ．そこで

$$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \langle \boldsymbol{a}\mid \boldsymbol{b}\rangle_M<0,$$

$$\boldsymbol{a}\not\sim\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \langle \boldsymbol{a}\mid \boldsymbol{b}\rangle_M>0$$

と定める．そのとき

（ii）$\boldsymbol{e}\in T$，$\|\boldsymbol{e}\|_T=1$ による Minkowski 分解 $V=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\oplus \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ において $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}^S$，$\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}^S$ のとき

$$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad ab>0$$

（iii）$\sim$ は，同値関係である．

（iv）$$\boldsymbol{a}\not\sim\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{a}\sim-\boldsymbol{b}$$

証明　（i）$|a|>\|\boldsymbol{a}^S\|_S$，$|b|>\|\boldsymbol{b}^S\|_S$ と Euclid 線型空間 $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ における Schwarz の不等式を用いて

$$|ab|=|a||b|>\|\boldsymbol{a}^S\|_S\|\boldsymbol{b}^S\|_S$$

$$\geqq|\langle \boldsymbol{a}^S\mid \boldsymbol{b}^S\rangle_S|$$

$$\therefore\quad \langle \boldsymbol{a}\mid \boldsymbol{b}\rangle_M=-ab+\langle \boldsymbol{a}^S\mid \boldsymbol{b}^S\rangle_S\neq 0$$

（ii）$ab>0 \quad\Rightarrow\quad ab=|ab|>\langle \boldsymbol{a}^S\mid \boldsymbol{b}^S\rangle_S$

$$\Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \rangle_M = -|ab| + \langle \boldsymbol{a}^S \mid \boldsymbol{b}^S \rangle_S < 0,$$

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$$

$$ab < 0 \quad \Rightarrow \quad ab = -|ab| < \langle \boldsymbol{a}^S \mid \boldsymbol{b}^S \rangle_S$$

$$\Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \rangle_M = |ab| + \langle \boldsymbol{a}^S \mid \boldsymbol{b}^S \rangle_S > 0,$$

$$\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{b}$$

$$\therefore \quad ab > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$$

(iii)　$a^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad ab > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c} = c\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c}^S \quad \Rightarrow \quad ab > 0$ かつ $bc > 0$

$\Rightarrow \quad ac > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$

(iv)　$\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad ab < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(-b) > 0$

$\Leftrightarrow \quad -\boldsymbol{b} = -b\boldsymbol{e} + (-\boldsymbol{b}^S) \sim \boldsymbol{a}$　　　(証明終)

定義（1.4.2）　時間性ベクトルの全体 T は，上の同値関係 $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ によって，2つの部分集合に

$$T = T_1 \cup T_2, \qquad T_1 \cap T_2 = \varnothing$$

と類別される．そこで T_1, T_2 の一方を**正の**時間性ベクトルの集合と指定することを $V^{(n,1)}$ を**時間的に向きづける**という．たとえば T_1 の方を正とすれば，他方の T_2 を**負の**時間性ベクトルの集合といい，$T_1 =: T^{\uparrow}$，$T_2 =: T^{\downarrow}$ と表す．$\boldsymbol{p} \in T^{\uparrow}$ のとき，$\boldsymbol{p}$ を**正の時間性ベクトル**または**未来ベクトル**という．$\boldsymbol{q} \in T^{\downarrow}$ を**負の時間性ベクトル**または**過去ベクトル**という．

$$T = T^{\uparrow} \cup T^{\downarrow}, \qquad T^{\uparrow} \cap T^{\downarrow} = \varnothing$$

$$\boldsymbol{a} \in T \Rightarrow (\boldsymbol{a} \in T^{\uparrow},\ -\boldsymbol{a} \in T^{\downarrow}) \quad \text{または} \quad (\boldsymbol{a} \in T^{\downarrow},\ -\boldsymbol{a} \in T^{\uparrow})$$

である．**単位未来ベクトル**は沢山存在する．

約束と記号　以下 Minkowski 線型空間 $V = V^{(n,1)}$ といえば，V は時間的に向きづけられた有向 Minkowski 線型空間を意味するものとする．また「$\boldsymbol{e}_0$ が未来ベクトルであるような」正規直交基底列 $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ は**順時的**であるという．正規直交基底列の全体 $\mathcal{U}_V = \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-$ において

$$\mathcal{U}^{\uparrow} := (\text{順時的正規直交基底列の全体})$$

$$= \{(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_V \mid \boldsymbol{e}_0 \in T^{\uparrow}\}$$

$$\mathcal{U}^{\downarrow} := \{(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_V \mid \boldsymbol{e}_0 \in T^{\downarrow}\}$$

$$\mathcal{U}_+^{\updownarrow} := (\text{順時的かつ正なる正規直交基底列の全体}) = \mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^{\uparrow}$$

と置く．すなわち，$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_+^{\updownarrow}$ とは

「$\boldsymbol{e}_0 \in T^{\uparrow}$　かつ　$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ は正の向き」

を意味する．

$$\mathcal{U}_V = (\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^{\uparrow}) \cup (\mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^{\downarrow}) \cup (\mathcal{U}^- \cap \mathcal{U}^{\uparrow}) \cup (\mathcal{U}^- \cap \mathcal{U}^{\downarrow})$$

以下

$$T_U := (\text{単位時間ベクトルの全体}) = \{\boldsymbol{e} \in V^{(n,1)} \mid \langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = -1\}$$

$$T_U^{\uparrow} := T_U \cap T^{\uparrow} = (\text{単位未来ベクトルの全体})$$

$$= \{\boldsymbol{e} \in T^{\uparrow} \mid \langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = -1\}$$

と置く．

系（1.4.3）　$\boldsymbol{e} \in T_U^{\uparrow} \subseteqq T^{\uparrow} \subseteqq T \subseteqq V = V^{(n,1)}$ を定めたとき

$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S \in V = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \oplus V^S(\boldsymbol{e})$ に対し

（i）　$\boldsymbol{x} \in T \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \|\boldsymbol{x}^S\|_S$　((1.3.8) 参照)

$\boldsymbol{x} \in T$ のとき

$$\boldsymbol{x} \in T^{\uparrow} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M > 0,$$

$$\boldsymbol{x} \in T^{\downarrow} \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

（ii）　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in T^{\uparrow} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in T^{\uparrow}$

証明　（i）　$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S \in T^{\uparrow} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{e} = 1\boldsymbol{e} + \boldsymbol{o}^S \quad \Leftrightarrow \quad x = x \cdot 1 > 0$

$$\boldsymbol{x} \in T^{\downarrow} \Leftrightarrow -\boldsymbol{x} = -x\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}^S \sim \boldsymbol{e} \quad \Leftrightarrow \quad -x > 0$$

（ii）　$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S$，$\boldsymbol{y} = y\boldsymbol{e} + \boldsymbol{y}^S \in T^{\uparrow}$ より，

$$x = |x| > \|\boldsymbol{x}^S\|_S, \qquad y = |y| > \|\boldsymbol{y}^S\|_S \geqq 0$$

$$\therefore \quad |x+y| = x+y > \|\boldsymbol{x}^S\|_S + \|\boldsymbol{y}^S\|_S \geqq \|\boldsymbol{x}^S + \boldsymbol{y}^S\|_S$$

$\therefore$　$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x+y)\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{x}^S + \boldsymbol{y}^S) \in T$，さらに $x+y>0$ だから

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in T^{\uparrow}$$

（証明終）

例（1.4.4）　$V = V^{(3,1)}$，$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathcal{U}_V^{\uparrow}$ とする．

$$\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1 \in T^{\uparrow}, \quad \boldsymbol{q} = 3\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1 \in T^{\uparrow}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_0 + 2\boldsymbol{e}_1 \in V$$

と置くと

$$\boldsymbol{x} \in V^S(\boldsymbol{p}), \qquad \boldsymbol{x} \notin V^S(\boldsymbol{q})$$

$\because$　$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{p} \rangle_M = -2+2 = 0$　より　$\boldsymbol{x} \in V^S(\boldsymbol{p})$

$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{q} \rangle_M = -3+2 = -1$　より　$\boldsymbol{x} \notin V^S(\boldsymbol{q})$

記号（1.4.5）　$\boldsymbol{a}^S \in V^S(\boldsymbol{e})$，$\|\boldsymbol{a}^S\|_S < 1$ に対し，

$$\gamma_e(\boldsymbol{a}^S) := \frac{1}{\sqrt{1-\|\boldsymbol{a}^S\|_S{}^2}} \geqq 1$$

と置く．

命題（1.4.6）　$\boldsymbol{e} \in T^{\uparrow}_U$ を定め，Euclid 線型空間 $V^S(\boldsymbol{e})$ における単位開球

$$B_1(\boldsymbol{e}) = \{\boldsymbol{g}^S \in V^S(\boldsymbol{e}) \mid \|\boldsymbol{g}^S\|_S < 1\}$$

を考える．このとき，条件 $\boldsymbol{f} = -\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}^S)$ で定まる写像

$$\beta : T^{\uparrow}_U \to B_1(\boldsymbol{e}), \quad \boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S = \frac{\boldsymbol{f}}{-\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M} - \boldsymbol{e}$$

は全単射である．逆写像は

$$\boldsymbol{f} = \gamma_e(\boldsymbol{g}^S)(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}^S) \leftarrow\!\shortmid \boldsymbol{g}^S$$

である．ここに，$\gamma_e(\boldsymbol{g}^S) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\|\boldsymbol{g}^S\|_S{}^2}} = -\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M$

証明　写像 $\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S$ が well-defined なこと：
$\boldsymbol{f} = \xi \boldsymbol{e} + \boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{w} \in V^S(\boldsymbol{e})$ と表すと，$\boldsymbol{f} \in T^{\uparrow}$ より $\xi > 0$，

$$\therefore \quad \boldsymbol{f} = \xi(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}^S), \qquad \boldsymbol{g}^S := \boldsymbol{w}/\xi \in V^S(\boldsymbol{e})$$

の形となる．

$$0 > \langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f} \rangle_M = \xi^2(-1 + \|\boldsymbol{g}^S\|_S{}^2)$$

より，$\|\boldsymbol{g}^S\|_S < 1$ が成り立つ．

$$1 = \|\boldsymbol{f}\|_T = -\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f} \rangle_M = \xi^2(1 - \|\boldsymbol{g}^S\|_S{}^2)$$

$$\therefore \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{1-\|\boldsymbol{g}^S\|_S{}^2}} = \gamma_e(\boldsymbol{g}^S)$$

また，$\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = -1$，$\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{g}^S \rangle_M = 0$ より，

$$\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f} \rangle_M = \langle \boldsymbol{e} \mid \xi(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}^S) \rangle_M = -\xi$$

写像 $\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S$ が単射なること：は当然．

写像 $\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S$ が全射なること：$\forall \boldsymbol{g}^S \in B_1(\boldsymbol{e})$，すなわち

$$\boldsymbol{g}^S \in V^S(\boldsymbol{e}), \qquad \|\boldsymbol{g}^S\|_S < 1$$

に対し，

$$\boldsymbol{f} := \gamma_e(\boldsymbol{g}^S)(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}^S)$$

と置くと，

$$\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M = \gamma_e(\boldsymbol{g}^S)^2(-1+\|\boldsymbol{g}^S\|_S{}^2) = -1$$

だから，$\boldsymbol{f}$ は単位時間ベクトルであり，$\gamma_e(\boldsymbol{g}^S)>0$ より未来ベクトルであって，$\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S$ である．（証明終）

命題（1.4.7）　Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において，$\boldsymbol{e}\in T_U^{\downarrow}$ による Minkowski 分解 $V=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\oplus V^S(\boldsymbol{e})$ を考える．$\boldsymbol{f}\in T_U \subseteqq V$，$V^S(\boldsymbol{e})=V^S(\boldsymbol{f})$ ならば，

$$\boldsymbol{f} = \pm\boldsymbol{e}$$

証明　$V=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\oplus V^S(\boldsymbol{e})$ において，

$$\boldsymbol{f}=\xi\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}^S, \qquad \boldsymbol{f}^S\in V^S(\boldsymbol{e}), \qquad \xi\in\boldsymbol{R}$$

と表す．$\boldsymbol{f}^S\in V^S(\boldsymbol{e})=V^S(\boldsymbol{f})$ だから，

$$0=\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f}^S\rangle_M = \langle \xi\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}^S \mid \boldsymbol{f}^S\rangle_M = \langle \boldsymbol{f}^S \mid \boldsymbol{f}^S\rangle_S,$$

$\therefore$　$\boldsymbol{f}^S=\boldsymbol{o}$,　$\boldsymbol{f}=\xi\boldsymbol{e}$,

$$-1=\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M = \langle \xi\boldsymbol{e} \mid \xi\boldsymbol{e}\rangle_M = -\xi^2$$

$$\xi^2=1, \qquad \xi=\pm 1$$

である．$\therefore$　$\boldsymbol{f}=\pm\boldsymbol{e}$　（証明終）

命題と定義（1.4.8）　Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において，$f\in L(V)$，すなわち斉次 Lorentz 変換 $f: V\to V$ に対し

（i）　f は時間性ベクトルの同値関係～を保存する．すなわち $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in T$ について

$$\boldsymbol{p}\sim\boldsymbol{q} \quad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{p})\sim f(\boldsymbol{q})$$

（ii）　次のどちらかが成り立つ．

(イ)　$f(T^{\uparrow})=T^{\uparrow}$,　　$f(T^{\downarrow})=T^{\downarrow}$

(ロ)　$f(T^{\uparrow})=T^{\downarrow}$,　　$f(T^{\downarrow})=T^{\uparrow}$

(イ)のような f を**順時 Lorentz 変換**という．その全体 $L^{\uparrow}=L^{\uparrow}(V)$ は斉次 Lorentz 群 $L(V)$ の正規部分群であって，**順時斉次 Lorentz 群**という．
$L^{+}\cap L^{\uparrow}$ を**制限斉次 Lorentz 群**という．

(ロ)のような f を**反時 Lorentz 変換**または**時間反転**であるといい，その全体を $L^{\downarrow}$ で表す．

$$L(V)=L^{\uparrow}\cup L^{\downarrow}, \quad L^{\uparrow}\cap L^{\downarrow}=\varnothing$$

$$=L^+\cup L^-,\quad L^+\cap L^-=\varnothing$$
$$=(L^+\cap L^\uparrow)\cup(L^+\cap L^\downarrow)\cup(L^-\cap L^\uparrow)\cup(L^-\cap L^\downarrow)$$
$$L^+\cap L^\uparrow=\{f\in L(V)\mid \det f=1,\ f(T^\uparrow)=T^\uparrow\}$$
$$L^+\cap L^\downarrow=\{f\in L(V)\mid \det f=1,\ f(T^\uparrow)=T^\downarrow\}$$
$$L^-\cap L^\uparrow=\{f\in L(V)\mid \det f=-1,\ f(T^\uparrow)=T^\uparrow\}$$
$$L^-\cap L^\downarrow=\{f\in L(V)\mid \det f=-1,\ f(T^\uparrow)=T^\downarrow\}$$

証明　(i)　$\boldsymbol{p}\sim\boldsymbol{q}\quad\Rightarrow\quad 0>\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{q}\rangle_M=\langle f(\boldsymbol{p})\mid f(\boldsymbol{q})\rangle_M$

$$\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{p})\sim f(\boldsymbol{q})$$

(ii)　$f(T^\uparrow\cup T^\downarrow)=T^\uparrow\cup T^\downarrow$，$T^\uparrow\cap T^\downarrow=\varnothing$ なること（§1.3の練習問題1）に注意しよう．

(イ)　$\exists\,\boldsymbol{p}\in T^\uparrow$，$f(\boldsymbol{p})\in T^\uparrow$ のとき，

$$\forall\,\boldsymbol{x}\in T^\uparrow,\quad \boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{p},\quad f(\boldsymbol{x})\sim f(\boldsymbol{p})\in T^\uparrow,\quad f(\boldsymbol{x})\in T^\uparrow$$
$$\therefore\quad f(T^\uparrow)\subseteqq T^\uparrow$$
$$\forall\,\boldsymbol{y}\in T^\downarrow,\ -\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{p},\ -f(\boldsymbol{y})=f(-\boldsymbol{y})\sim f(\boldsymbol{p})\in T^\uparrow,\ f(\boldsymbol{y})\in T^\downarrow$$
$$\therefore\quad f(T^\downarrow)\subseteqq T^\downarrow$$
$$T^\uparrow\cup T^\downarrow=f(T^\uparrow\cup T^\downarrow)=f(T^\uparrow)\cup f(T^\downarrow)\subseteqq T^\uparrow\cup T^\downarrow,\ T^\uparrow\cap T^\downarrow=\varnothing$$
$$\therefore\quad f(T^\uparrow)=T^\uparrow,\qquad f(T^\downarrow)=T^\downarrow$$

(ロ)　$\exists\,\boldsymbol{q}\in T^\uparrow$，$f(\boldsymbol{q})\in T^\downarrow$ のとき，

$$\forall\,\boldsymbol{x}\in T^\uparrow,\ \boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{q},\ f(\boldsymbol{x})\sim f(\boldsymbol{q})\in T^\downarrow,\ f(\boldsymbol{x})\in T^\downarrow$$
$$\forall\,\boldsymbol{y}\in T^\downarrow,\ -\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{q},\ -f(\boldsymbol{y})\sim f(\boldsymbol{q})\in T^\downarrow,\ f(\boldsymbol{y})\in T^\uparrow$$
$$\therefore\quad f(T^\uparrow)=T^\downarrow,\qquad f(T^\downarrow)=T^\uparrow$$

系 (1.4.9)　$V=V^{(n,1)}$，$f\in L(V)$ について，

(i)　$f\in L^\uparrow\Leftrightarrow\quad \forall\,\boldsymbol{p}\in T^\uparrow,\ \langle\boldsymbol{p}\mid f(\boldsymbol{p})\rangle_M<0$

$$\Leftrightarrow\quad \exists\,\boldsymbol{p}\in T^\uparrow,\ \langle\boldsymbol{p}\mid f(\boldsymbol{p})\rangle_M<0$$

(ii)　$f\in L^\downarrow\Leftrightarrow\quad \forall\,\boldsymbol{p}\in T^\uparrow,\ \langle\boldsymbol{p}\mid f(\boldsymbol{p})\rangle_M>0$

$$\Leftrightarrow\quad \exists\,\boldsymbol{p}\in T^\uparrow,\ \langle\boldsymbol{p}\mid f(\boldsymbol{p})\rangle_M>0$$

証明　(i)　$f\in L^\uparrow$ とする．$\forall\,\boldsymbol{p}\in T^\uparrow$，$f(\boldsymbol{p})\in T^\uparrow$ だから

$$\langle\boldsymbol{p}\mid f(\boldsymbol{p})\rangle_M<0$$

逆に，$\exists\,\boldsymbol{p}\in T^\uparrow$，$\langle\boldsymbol{p}\mid f(\boldsymbol{p})\rangle_M<0$ とする．このとき，$\boldsymbol{p}\sim f(\boldsymbol{p})$ だから，

$f(\boldsymbol{p})\in T^{\uparrow}$，ゆえに (1.4.8) より，$f\in L^{\uparrow}$

(ii) も同様．　(証明終)

補題 (1.4.10)　m 項列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^m$ において，m 個のベクトル

$$\boldsymbol{b}_j=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} \quad (1\leqq j\leqq m)$$

よりなる列

$$B=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m)=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

を m 次の正方行列と見るとき，m 次行列 $A=(\boldsymbol{a}_0, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=(a_{ij})$ に対し

(i)　$AB=(A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \cdots, A\boldsymbol{b}_m)$

(ii)　$BA=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m)A$

$$=(\sum \boldsymbol{b}_i a_{i1}, \sum \boldsymbol{b}_i a_{i2}, \cdots, \sum \boldsymbol{b}_i a_{im})$$

が成り立つ．

(iii)　特に $\varepsilon_0=(\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n)\in\mathcal{U}$ を行列と見れば，$\varepsilon_0=I_{n+1}$ である．

証明　行列を小行列に区分けして積を作る計算の特別の場合である．

(証明終)

補題 (1.4.11)　列ベクトルの Minkowski 線型空間 $V=\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ においては，自然基底列

$$\boldsymbol{g}_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{g}_n=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

が (1.2.2) 順時的正の正規直交基底列となるように，すなわち $\varepsilon=(\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n)\in\mathcal{U}_+^{\uparrow}$ となるように，$\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ の向きと時間的向きを定める．

(i)　このとき Lorentz 変換 $\boldsymbol{R}^{(n,1)}\to\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ は ∃ 擬直交行列 $A\in O(n,1)$ に

よって

$$\boldsymbol{R}^{(n,1)} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

と表される.

$$\begin{array}{ccc} GL(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) & \cong & GL(n+1, \boldsymbol{R}) \\ \cup & & \cup \\ L(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) & \cong & O(n,1) \end{array}$$

ここでさらに

$$\begin{aligned} O^+(n,1) &:= O(n,1) \cap SL(n+1, \boldsymbol{R}) \\ O^- &:= \{A \in O(n,1) \mid \det A = -1\} \\ &= O(n,1) - O^+(n,1) \\ O^\uparrow(n,1) &= \{A = (a_{ij}) \in O(n,1) \mid a_{00} > 0\} \\ O^\downarrow &= O(n,1) - O^\uparrow(n,1) \end{aligned}$$

と置く. このとき

(ii)

$$\begin{aligned} L^+(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) &\cong O^+(n,1) \\ L^- &\leftrightarrow O^- \\ L^\uparrow(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) &\cong O^\uparrow(n,1) \\ L^\downarrow &\leftrightarrow O^\downarrow \end{aligned}$$

である.

(iii) たとえば $n=3$ のとき, $V=\boldsymbol{R}^{(3,1)}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in O^+ \cap O^\uparrow, \qquad \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in O^+ \cap O^\downarrow,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in O^- \cap O^\uparrow, \qquad \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in O^- \cap O^\downarrow$$

証明　自然基底列 $(\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n) \in \mathcal{U}_+^\uparrow$ となるように, $\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ の向きと時間的向きを定めた.

(i)

$$L(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) \cong O(n,1) \subseteqq SL(n+1, \boldsymbol{R})$$

$$f \leftrightarrow A$$
$$\det f := \det A$$

であったから，

$$L^{+}(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) \cong O^{+}(n,1)$$
$$L^{-} \cong O^{-}$$

は当然である．

$$L(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) \ni f \leftrightarrow A = (a_{ij}) \in O(n,1)$$

について，

$$f(\boldsymbol{g}_0) = A\boldsymbol{g}_0 = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{g}_0 a_{00} + \boldsymbol{g}_1 a_{10} + \cdots + \boldsymbol{g}_n a_{n0}$$

$$f \in L^{\uparrow}(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) \Leftrightarrow \langle f(\boldsymbol{g}_0) \mid \boldsymbol{g}_0 \rangle_M = -a_{00} < 0$$
$$\Leftrightarrow A \in O^{\uparrow}(n,1)$$

であるし，

$$L^{\downarrow} = L - L^{\uparrow} \cong O - O^{\uparrow} = O^{\downarrow}$$

も当然である．　（証明終）

命題（1.4.12）（i）Minkowski 線型空間 $V = \boldsymbol{R}^{(n,1)}$ において，群 $GL(n+1, \boldsymbol{R})$ は基底列全体の集合 $\mathcal{B}_V$ に右から可遷的に作用する．

群 $O(n,1)$ は正規直交基底列の全体 $\mathcal{U}_V$ に右から可遷的かつ自由に作用する．さらに

（ii）群 $O^{+}(n,1)$ は正の正規直交基底列の全体 $\mathcal{U}^{+}$ に右から可遷的かつ自由に作用する．

（iii）群 $O^{\uparrow}(n,1)$ は順時的な正規直交基底列の全体 $\mathcal{U}^{\uparrow}$ に右から可遷的かつ自由に作用する．

（iv）群 $O^{+}(n,1) \cap O^{\uparrow}(n,1)$ は順時的かつ正の正規直交基底列の全体

$$\mathcal{U}^{+} \cap \mathcal{U}^{\uparrow} = \mathcal{U}_{+}^{\uparrow}$$

に右から可遷的かつ自由に作用する．

証明（i）は既に述べた（§1.2 の練習問題 1）．

（ii）自然基底列 $(\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n) \in \mathcal{U}_{+}^{\uparrow}$ となるように，$\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ の向きと時間的

向きを定めた．

$$L(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) \cong O(n,1) \subseteqq GL(n+1, \boldsymbol{R})$$
$$f \leftrightarrow A$$
$$\det f := \det A$$

であったから，

$$L^+(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) \cong O^+(n,1)$$

は当然である．定義により

$$L^+(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) = O^+(n,1) = \{A \in O(n,1) \mid \det A = 1\}$$

であるから，写像

$$\rho : \mathcal{U}^+ \times O^+(n,1) \to \mathcal{U}^+, \quad (\varepsilon, A) \mapsto \varepsilon A$$

はwell-definedである．ρ が可遷的なることは：$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}^+$，$\exists A \in O(n,1)$.

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 A \quad \Rightarrow \quad A \in O^+(n,1)$$

なることによる．(1.2.8) 参照．

(iii)　$\varepsilon_0 = (\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n) \in \mathcal{U}^{\uparrow}_U$ を行列と見れば，$\varepsilon_0 = I_{n+1}$ であるから

$$A = (\boldsymbol{a}_0, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = (a_{ij}) \in O(n,1)$$

に対し，$\varepsilon = \varepsilon_0 A = A$ である．

$$A \in O^{\uparrow}(n,1) \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{g}_0 \in T^{\uparrow}_U$$
$$\Leftrightarrow \quad -a_{00} = \langle \boldsymbol{g}_0 \mid A\boldsymbol{g}_0 \rangle_M < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{00} > 0 \qquad \cdots ①$$

基底列 $\varepsilon = (\boldsymbol{a}_0, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \in \mathcal{B}_V$ を行列 $A = (a_{ij})$ と見たとき

$$A = \varepsilon = (\boldsymbol{a}_0, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$
$$A = \varepsilon \in \mathcal{U}^{\uparrow}_U \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_0 \in T^{\uparrow}_U \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{a}_0 \mid \boldsymbol{g}_0 \rangle_M = -a_{00} < 0 \qquad \cdots ②$$

が成り立つことに注意する．

$O^{\uparrow}(n,1) \cong L^{\uparrow}(\boldsymbol{R}^{(n,1)})$ より

$$\rho : \mathcal{U}^{\uparrow} \times O^{\uparrow}(n,1) \to \mathcal{U}^{\uparrow}, \quad (\varepsilon, A) \mapsto \varepsilon A$$

は well-defined である．ρ が可遷的かつ自由なることは (ii) と同様に示せる．§1.2 の問題1の答，$\mathcal{U}^{\uparrow}$ の定義 (1.4.2) 参照．

(iv)　可遷的なることのみを示せばよい．

$$\forall (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n),\ (\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n) \in \mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}^{\uparrow}$$

に対し，これらを $\mathcal{U}^+$ の元(げん)と見れば，

$$\exists A \in O^+(n,1),\ (\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n) = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)A$$

である．$A=(a_{ij})$ とすると $\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{e}_0a_{00}+\boldsymbol{e}_1a_{10}+\cdots+\boldsymbol{e}_na_{n0}$

一方 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{f}_0\in T_U^{\downarrow}$ であるから，$a_{00}>0$ である．これより

$$A\in O^{\uparrow}(n,1)$$

である．

$$\therefore\quad A\in O^{+}(n,1)\cap O^{\uparrow}(n,1)$$
（証明終）

命題（1.4.13）　Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において，各単位時間ベクトル $\boldsymbol{e}_0\in T_U$ に対し，Euclid 線型空間 $V^S(\boldsymbol{e}_0)$ には，2 通りの向きが考えられる．それは $V^S(\boldsymbol{e}_0)$ の正規直交基底列の向きにより定まる．これについて，$V^S(\boldsymbol{e}_0)$ の 2 つの正規直交基底列

$$(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n),\ (\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n)$$

に対し，

$$\exists A\in SO(n),\ (\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)A$$
$$\Leftrightarrow(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\sim(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n)$$
すなわち $\exists B\in O^{+}(n,1)\cap O^{\uparrow}(n,1)$
$$(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)B$$

証明　($\Rightarrow$)　$A\in O(n)$，$\det A=1$

$$(\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)A$$

とする．このとき $B=\begin{bmatrix}1 & O\\ O & A\end{bmatrix}$ と置けば，$\det B=1$,

$$B\in O^{+}(n,1)\cap O^{\uparrow}(n,1)$$
$$(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)B$$

($\Leftarrow$)　逆に，$B\in O^{+}(n,1)$

$$(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)B$$

とする．$B=(b_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ とすると，

$$\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{e}_0b_{00}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{e}_jb_{0j},\quad b_{00}=1,\quad b_{0j}=0\quad(1\leqq j\leqq n)$$

$$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{e}_0b_{10}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{e}_jb_{1j},\qquad b_{10}=0$$

$$\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots$$

$$\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{e}_0 b_{n0} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j b_{nj}, \quad b_{n0} = 0$$

したがって，$B = \begin{bmatrix} 1 & O \\ O & A \end{bmatrix}$，$A = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$，$\det A = \det B = 1$

$$(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) A$$

（証明終）

§1.4 の練習問題

問題 1. Minkowski 線型空間 $V^{(n,1)}$ において，写像

$$\sigma : L(V^{(n,1)}) \to \{1, -1\} \times \{1, -1\},$$

（ここに $\{1, -1\}$ は -1 が生成する位数 2 の乗法群を表す.）

$$f \mapsto \left(\frac{\det f}{|\det f|}, \frac{-\langle \boldsymbol{e}_0 \mid f(\boldsymbol{e}_0) \rangle_M}{|\langle \boldsymbol{e}_0 \mid f(\boldsymbol{e}_0) \rangle_M|} \right)$$

は，群の準同型写像であって，全射である．写像 σ は単位未来ベクトル $\boldsymbol{e}_0 \in T^{\uparrow}_U$ の取り方によらない．

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\sigma) = \sigma^{-1}(\{(1,1)\}) &= L^+ \cap L^{\uparrow}, \\ \sigma^{-1}(\{(1,-1)\}) &= L^+ \cap L^{\downarrow}, \\ \sigma^{-1}(\{(-1,1)\}) &= L^- \cap L^{\uparrow}, \\ \sigma^{-1}(\{(-1,-1)\}) &= L^- \cap L^{\downarrow} \end{aligned}$$

答

1. σ が well-defined なこと：$\boldsymbol{e}_0 \in T^{\uparrow}_U$ より $f(\boldsymbol{e}_0) \in T$ である．よって $\langle \boldsymbol{e}_0 \mid f(\boldsymbol{e}_0) \rangle_M \neq 0$ であり，σ は定義される．(1.4.9) をも参照．

§1.5 双対 Minkowski 線型空間 $(V^*, \mathcal{U}^{\uparrow}_+)$

補題 (1.5.1) (i) $(V, \langle \ \mid \ \rangle_M)$ が (n, q) 型の一般 Minkowski 線型空間のとき，V は自然な仕方で双対空間 $V^* = Lin(V, \boldsymbol{R})$ と同型である．すなわち，$\boldsymbol{a} \in V$ に対し，写像 $\mu(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^* : V \to \boldsymbol{R}$ を，

$$\forall \boldsymbol{x} \in V, \ \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M$$

によって定義するとき，

(i) $\mu(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^* \in V^*$ であって，$\mu : V \cong V^*$ は同型写像である．

(ii) このとき，V の正規直交基底列

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q, \boldsymbol{e}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$$

の双対基底列は

$$(-\boldsymbol{e}_1{}^*, \cdots, -\boldsymbol{e}_q{}^*, \boldsymbol{e}_{q+1}{}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_m{}^*)$$

である．

(iii)　V^* において $f=\mu(\boldsymbol{x})$, $g=\mu(\boldsymbol{y})\in V^*$ の内積を

$$\langle f \mid g\rangle_M := \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M$$

と定義すれば，$(V^*, \langle\ \mid\ \rangle_M)$ もまた (n, q) 型の一般 Minkowski 線型空間となる．V の正規直交基底列 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q, \boldsymbol{e}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ に対し，

$$(\boldsymbol{e}_1{}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_q{}^*, \boldsymbol{e}_{q+1}{}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_m{}^*)$$

は V^* の正規直交基底列である．写像 μ は単なる同型ではなく，計量同型

$$(V, \langle\ \mid\ \rangle_M) \cong (V^*, \langle\ \mid\ \rangle_M)$$

である (1.1.9)．

記号 (1.5.2)　m 次元の一般 Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,q)}$ の必ずしも正規直交でない基底列

$$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$$

を定め，

$$g_{ij} = \langle \boldsymbol{a}_i \mid \boldsymbol{a}_j\rangle_M$$

と置く．$g_{ij}=g_{ji}$ である．

系 (1.5.3)　特に $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ が正規直交基底列

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q, \boldsymbol{e}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$$

のときには，

$$g_{ii}=-1 \quad (1\leqq i\leqq q), \quad g_{jj}=1 \quad (q+1\leqq j\leqq m)$$

$$g_{ij}=0 \quad (i\neq j)$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} -I_q & \\ & I_n \end{bmatrix}$$

証明

$$g_{ii}=\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i\rangle_M = -1 \quad (1\leqq i\leqq q)$$

$$g_{jj}=\langle \boldsymbol{e}_j \mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M = 1 \quad (q+1\leqq j\leqq m)$$

$$g_{ij}=\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M = 0 \quad (i\neq j)$$

が成り立つ．　(証明終)

系 (1.5.4)　$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ の双対基底列を $(\xi^1, \cdots, \xi^m)$，すなわち

$$\xi^i(\boldsymbol{a}_j)=\delta^i{}_j$$

とするとき,

$$\forall \boldsymbol{x}\in V,\ \ \boldsymbol{x}=\sum \boldsymbol{a}_i x^i=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^*=\sum \xi^i x_i=(\xi^1, \cdots, \xi^m)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

と書けば,

（i）　$$x_j=\sum x^i g_{ij},\quad g_{ij}=\langle \boldsymbol{a}_i \mid \boldsymbol{a}_j\rangle_M$$

が成り立つ．そこで，自然同型 $\mu: V\cong V^*$ を **lowering an index isomorphism** という．μ を行うことを**インデックスを下げる**という．

自然同型 $\mu: V\cong V^*$

$$\boldsymbol{x}=(x^1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x^q\boldsymbol{a}_q)+(x^{q+1}\boldsymbol{a}_{q+1}+\cdots+x^m\boldsymbol{a}_m)$$
$$\mapsto \boldsymbol{x}^*=(x_1\xi^1+\cdots+x_q\xi^q)+(x_{q+1}\xi^{q+1}+\cdots+x_m\xi^m)$$

の基底列 $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$, $(\xi^1, \cdots, \xi^m)$ に関する表現行列が (g_{ij}) である．

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}=(g_{ij})\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}$$

（ii）　特に $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ が正規直交基底列 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q, \boldsymbol{e}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ のときには

$$x_1=-x^1,\ \ \cdots,\ \ x_q=-x^q,\ \ x_{q+1}=x^{q+1},\ \ \cdots,\ \ x_m=x^m$$

が成り立つ．

証明　（i）　$\xi^i(\boldsymbol{a}_j)=\delta^i{}_j$ だから,

$$x_j=\sum_i x_i\xi^i(\boldsymbol{a}_j)=\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{a}_j)$$
$$=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}_j\rangle_M=\sum x^i\langle \boldsymbol{a}_i \mid \boldsymbol{a}_j\rangle_M=\sum x^i g_{ij}$$

（ii）

$$g_{ii}=\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i\rangle_M=-1 \qquad (1\leqq i\leqq q)$$
$$g_{jj}=\langle \boldsymbol{e}_j \mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M=1 \qquad (q+1\leqq j\leqq m)$$
$$g_{ij}=\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_j\rangle_M=0 \qquad (i\neq j)$$

のときには,

$1\leqq j\leqq q$ に対し，$x_j=\sum x^i g_{ij}=-x^j$

$q+1\leqq j\leqq m$ に対し，$x_j=\sum x^i g_{ij}=x^j$

が成り立つ．　　(証明終)

$\boldsymbol{a}\in V$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}^*=\mu(\boldsymbol{a})=\langle \boldsymbol{a}\mid -\rangle_M\in V^*$ を互いに他の**随伴ベクトル**であるという．

命題（1.5.5）（i）　$V^*\ni\forall\eta=\sum y_i\xi^i$，$V\ni\forall \boldsymbol{x}=\sum x^j\boldsymbol{a}_j$

$$\eta(\boldsymbol{x})=\sum y_ix^i$$

（ii）　$V\ni\forall \boldsymbol{x}=\sum x^j\boldsymbol{a}_j$，$\forall \boldsymbol{y}=\sum y^j\boldsymbol{a}_j$

$V^*\ni\boldsymbol{x}^*=\sum x_j\xi^j$，$\boldsymbol{y}^*=\sum y_j\xi^j$ と置けば，内積は

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M&=\sum_i\sum_j x^iy^jg_{ij}\\&=\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{y})=\sum_j x_jy^j\\&=\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x})=\sum_i x^iy_i\end{aligned}$$

証明　（i）　$\eta(\boldsymbol{x})=\left(\sum_i y_i\xi^i\right)\left(\sum_j x^j\boldsymbol{a}_j\right)$

$$\begin{aligned}&=\sum_i\sum_j y_ix^j\xi^i(\boldsymbol{a}_j)=\sum_i\sum_j y_ix^j\delta^j{}_i\\&=\sum_i y_ix^i\end{aligned}$$

（ii）　$\langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M=\sum_i\sum_j x^iy^j\langle \boldsymbol{a}_i\mid\boldsymbol{a}_j\rangle_M=\sum_i\sum_j x^iy^jg_{ij}$

$$=\sum\left(\sum x^ig_{ij}\right)y^j$$

ここで $x_j=\sum x^ig_{ij}$ と（i）を用いて

$$=\sum x_jy^j=\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{y})$$

となる．また $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x})=\langle \boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=\langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M=\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{y})$ である．　　(証明終)

定義（1.5.6）　対称行列 $(g_{ij})=(\langle \boldsymbol{a}_i\mid\boldsymbol{a}_j\rangle_M)$ の逆行列を (g^{ij}) で表す．

$$\sum g^{ik}g_{kj}=\delta^i{}_j$$

特に $(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ が正規直交基底列のときには

$$(g^{ij})=\begin{bmatrix}-I_q & \\ & I_n\end{bmatrix}=(g_{ij})$$

となる．

系（1.5.7）　$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ の双対基底列を $(\xi^1,\cdots,\xi^m)$，すなわち

$$\xi^i(\boldsymbol{a}_j)=\delta^i{}_j$$

とするとき，

$$\forall \boldsymbol{x} \in V, \quad \boldsymbol{x} = \sum \boldsymbol{a}_i x^i = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^* = \sum \xi^i x_i = (\xi^1, \cdots, \xi^m) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

と書けば,

(i) $$x^i = \sum_j x_j g^{ij}$$

が成り立つ．そこで，自然同型 μ^{-1}：$V^* \cong V$ を **raising an index isomorphism** という．μ^{-1} を行うことを**インデックスを上げる**という．

自然同型 μ^{-1}：$V^* \cong V$

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1 \xi^1 + \cdots + x_q \xi^q) + x_{q+1} \xi^{q+1} + \cdots + x_m \xi^m$$
$$\mapsto \boldsymbol{x} = x^1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x^q \boldsymbol{a}_q + x^{q+1} \boldsymbol{a}_{q+1} + \cdots + x^m \boldsymbol{a}_m$$

の基底列 $(\xi^1, \cdots, \xi^m)$，$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ に関する表現行列が (g^{ij}) である．

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} = (g^{ij}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

(ii) 特に $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ が正規直交基底列 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_q, \boldsymbol{e}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ のときには

$$x^1 = -x_1, \quad \cdots, \quad x^q = -x_q, \quad x^{q+1} = x_{q+1}, \quad \cdots, \quad x^m = x_m$$

が成り立つ．

証明 (i) $$(g^{ij})(g_{ij}) = I$$

であるから，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = (g_{ij}) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}$$

より，

$$(g^{ij}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = (g^{ij})(g_{ij}) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}$$

を得る．

(ii) この場合 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ より

$$g^{ii}=-1 \qquad (1\leqq i\leqq q),$$
$$g^{jj}=1 \qquad (q+1\leqq j\leqq m),$$
$$g^{ij}=0 \qquad (i\neq j)$$

であるから,

$$1\leqq j\leqq q \text{ に対し,} \quad x^j=\sum x_i g^{ij}=-x_j$$
$$q+1\leqq j\leqq m \text{ に対し,} \quad x^j=\sum x_i g^{ij}=x_j$$

が成り立つ. (証明終)

約束 (1.5.8) Minkowski 線型空間 $V=V^{(n,1)}$ において, 双対空間 V^* もまた Minkowski 線型空間であり, 写像

$$\mu:(V,\langle\ |\ \rangle_M)\cong(V^*,\langle\ |\ \rangle_M)$$
$$\boldsymbol{a}\mapsto \boldsymbol{a}^*=\langle \boldsymbol{a}\,|\,-\rangle_M$$

は計量同型である.

$$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U} \text{ のとき } (\boldsymbol{e}_0^*, \boldsymbol{e}_1^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*)\in\mathcal{U}$$

が成り立つ. さらに

$$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U}^{\uparrow}_{+}=\mathcal{U}^{+}\cap\mathcal{U}^{\uparrow}$$

すなわち,

「$\boldsymbol{e}_0\in T^{\uparrow}_{U}$ かつ $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ は正の向き」

のとき, $\pm\boldsymbol{e}_0^*$ は単位時間ベクトルである. 以下, V^* の向きと時間的向きとを, 基底列

$$(\boldsymbol{e}_0^*, \boldsymbol{e}_1^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*)\in\mathcal{U}^{\uparrow}_{+}$$

であるように定める. 特に, 単位時間ベクトル $\pm\boldsymbol{e}_0^*$ のうち, $\boldsymbol{e}_0^*$ の方を未来ベクトルと定める. このとき, $(V^*, \mathcal{U}^{\uparrow}_{+})$ を (空間的かつ時間的に向きづけられた) **双対 Minkowski 線型空間**という. 自然同型

$$\mu:\ V\to V^*,$$
$$x^0\boldsymbol{e}_0+x^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n\mapsto x^0\boldsymbol{e}_0^*+x^1\boldsymbol{e}_1^*+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n^*$$
$$=(-x^0)\xi+x^1\boldsymbol{e}_1^*+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n^*$$

により,

$$\mu(\boldsymbol{e}_0)=\boldsymbol{e}_0^*=-\xi$$

であり, μ は Minkowski 線型空間の順時的な計量同型写像である.

第2章　Minkowski 空間，劣光速世界線，慣性時刻

m 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{V}^m{}_A)$ の定義と性質，アフィン写像 $(f, \boldsymbol{f}):(\boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{V}^m{}_A)\to(\boldsymbol{A}^n, \boldsymbol{V}^n{}_A)$ の定義と性質，アフィン空間の間の写像 $G:\boldsymbol{A}^m\to\boldsymbol{A}^n$ の微分係数 $G'(P)$ の定義と性質等については，有馬・浅技［4］を仮定する．

慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ の考え (§2.1) が重要である．世界線の慣性時刻表示 (§2.3) と世界線 X の定義に関連して，X がある慣性系において慣性時刻表示をもてば，X は任意の慣性系において慣性時刻表示をもつことを示す．

Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}^m, \boldsymbol{V}^m{}_M)$ において，慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ を定めたとき，位置 $X\in\boldsymbol{M}$ は Minkowski 座標 $Obs_{(O,e)}(X)=(x, \boldsymbol{x}_{(O,e)})\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ により表される．

$$Obs_{(O,e)}:\boldsymbol{M}\cong\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}),\quad X=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}\leftrightarrow(x, \boldsymbol{x}_{(O,e)})$$

劣光速世界線 X を定めたとき $\forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$，$(P, \boldsymbol{f})$ における慣性時刻表示

$$X_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$
$$X_{(P,f)}(y)=O+y\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(P,f)}(y)$$

の関係を詳しく調べる．特に両者の慣性時刻の間の全単射

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}=X_{(P,f)}{}^{-1}\circ X_{(O,e)}$$

の微分係数を求める．ついで劣光速世界線の固有時刻と静止系について述べる．本章の参考文献：

［4］　有馬・浅技：ベクトル場と電磁場

§2.1　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}^m, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$，慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$

定義 (2.1.1)　(i)　$m=n+1$ 次元アフィン空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^m)$ において，同伴線型空間 $\boldsymbol{V}^m$ が Minkowski 線型空間であるとき，$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^m)$ を **m 次元 Minkowski 空間**という．当然 $\boldsymbol{V}^m=\boldsymbol{V}^{(n,1)}$ は約束 (1.4.2) により時間的および空間的に向きづけられた Minkowski 線型空間とする．

$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^m)$ を

$$(\boldsymbol{M}^m, \boldsymbol{V}^{(n,1)}), \quad (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^m{}_{n,1}), \quad (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{M}}), \quad (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V})$$

簡単に $\boldsymbol{M}^m{}_{\boldsymbol{M}}$，$\boldsymbol{M}^m$，$\boldsymbol{M}$ などとも表す．基礎集合 $\boldsymbol{M}$ の元を**事象**，**世界点**，**時空位置**，簡単に**位置**等という．

$$T^{\uparrow}=(\text{未来ベクトルの全体})\subseteqq T=\{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{V}^{(n,1)} \mid \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle_{\boldsymbol{M}}<0,\ \boldsymbol{x}\ \text{は未来}\}$$

$$T^{\uparrow}_{U}=(\text{単位未来ベクトルの全体})$$

(ii) 正規直交基底列 $\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n\in \boldsymbol{V}^{(n,1)}$ と位置 $O\in \boldsymbol{M}^m$ との組

$$\Sigma :=(O\,;\, \boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in \boldsymbol{M}\times \mathcal{U}$$

はアフィン座標枠の特別なものである．これを **Minkowski 枠**という．$\Sigma=(O\,;\, \boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in \boldsymbol{M}\times \mathcal{U}^+$ のとき，Σ は正の向きであるという (1.4.2)．$\Sigma=(O\,;\, \boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in \boldsymbol{M}\times \mathcal{U}$ に関する座標を普通上付きの添数を用いて

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad (x^i)_{0\leqq i\leqq n}, \quad \text{または簡単に} \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

のように表し，**反変座標**ともいう．

$$\forall X\in \boldsymbol{M}, \quad \exists_1 (x^i)_{0\leqq i\leqq n}, \quad X=O+x^0\boldsymbol{e}_0+x^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n$$

写像

$$\boldsymbol{M}\to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \quad X\mapsto x^0\boldsymbol{g}_0+x^1\boldsymbol{g}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{g}_n=\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

を Minkowski 枠 Σ が定める**座標化**といい，

$$\mathrm{Coord}_{\Sigma}, \quad \mathrm{Coord}_{(O;\boldsymbol{e}_i)} \quad \text{または} \quad \mathrm{Coord}$$

で表す．ここに $(\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n)$ は Minkowski 線型空間 $\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ の自然基底である (1.2.2)．

命題 (2.1.2) Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，$(O\,;\, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$，$(P\,;\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$ を2つの Minkowski 枠

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T, \quad T\in O(n, 1)$$

$$\overrightarrow{OP}=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}\in \boldsymbol{V}=\boldsymbol{Re}+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

とする．事象 $X\in\boldsymbol{M}$ に対し，

$$\mathrm{Coord}_{(O;e_i)}(X)=\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Coord}_{(P;f_i)}(X)=\begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

とする．このとき

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

証明 ［4］，(3.2.2) 参照．

復習 (2.1.3) 二つのアフィン空間 $(A_1^n, \boldsymbol{V}_1^n)$，$(A_2^m, \boldsymbol{V}_2^m)$ において，

（i） 写像 $f\in Map(A_1, A_2)$ が**アフィン写像**である

$$\Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{f}\in Lin(V_1, V_2),\quad \forall P\in A_1,\quad \forall \boldsymbol{a}\in V_1,$$
$$f(P+\boldsymbol{a})=f(P)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \qquad \cdots①$$

が成り立つことである．f を $(f, \boldsymbol{f})$ とも書き表す．条件①は次の条件②または③と同値である．

$$\Leftrightarrow \forall P, Q\in A,\ f(P)f(Q)=\boldsymbol{f}(PQ) \qquad \cdots②$$
$$\Leftrightarrow \forall P, Q\in A,\ f(Q)=f(P)+\boldsymbol{f}(PQ) \qquad \cdots③$$

（ii） 写像 $g\in Map(A_1, A_2)$ が点 $P\in A_1$ において<u>微分可能</u>であるとは，f が P においてあるアフィン写像 $(f, \boldsymbol{f})$：$(A_1^n, \boldsymbol{V}_1^n)\to(A_2^m, \boldsymbol{V}_2^m)$ によって近似されること，すなわち

$$\Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{f}\in Lin(V_1, V_2),\ \forall \boldsymbol{a}\in V_1,$$
$$g(P+\boldsymbol{a})=f(P)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+o(\boldsymbol{a}) \qquad \cdots①$$

すなわち

$$g(X)=f(X)+\boldsymbol{f}(PX)+o(PX) \qquad (X\to P)$$

が成り立つことである．$\boldsymbol{f}\in Lin(V_1, V_2)$ を g の P における**微分係数**といい，

$$g'(P) := \boldsymbol{f}$$

で表す．写像 $g\in Map(A_1, A_2)$ が $\forall$ 点 $P\in A_1$ において微分可能であるとき，$\forall$ 点 $P\in A_1$ における微分係数 $g'(P)\in Map(A_1, A_2)$ が定まり，写像 $A_1\to Lin(V_1, V_2)$ が考えられる．これを

$$g' : A_1\to Lin(V_1, V_2), \quad P\mapsto g'(P)$$

と表し，g の**導写像**という．

(iii)　特にアフィン空間 (A, V^m) からそれ自身へのアフィン写像 $(f, \boldsymbol{f})$ を**アフィン変換**という．$(f, \boldsymbol{f})$ がアフィン変換であれば，写像 f が A 上至る所微分可能であって，しかも導写像 $f'(X)$ が定値である．

$$\forall P\in A, \quad f'(P)=\boldsymbol{f}$$

$(A, \boldsymbol{V}^m)$ の全単射アフィン変換の全体 G_A は積

$$(f_2, \boldsymbol{f}_2)\circ(f_1, \boldsymbol{f}_1) :=(f_2\circ f_1, \boldsymbol{f}_2\circ \boldsymbol{f}_1),$$
$$(f, \boldsymbol{f})^{-1}=(f^{-1}, \boldsymbol{f}^{-1})$$

により群をなす．$\boldsymbol{G}_A$ を $(A, \boldsymbol{V})$ の**アフィン変換群**という．

(iv)　$\boldsymbol{a}\in V$ が定める平行移動 $f_a\in \boldsymbol{T}$ はアフィン変換としては

$$(f_a, I_V), \quad f_a : A\to A, \quad f_a=\boldsymbol{I}_V : V\to V$$

に他ならない．

$\because$　$f_a(X)=X+\boldsymbol{a}$ の導写像 $f'_a(X)=\boldsymbol{I}_V$ は定値である．

$$\boldsymbol{V}\cong \boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{a}\leftrightarrow(f_a, I_V)$$

(v)　写像 $\sigma : \boldsymbol{G}_A\to GL(\boldsymbol{V})$，$(f, \boldsymbol{f})\mapsto \boldsymbol{f}$ により

$$\boldsymbol{G}_A/\boldsymbol{T}\cong GL(\boldsymbol{V})$$

である（[4]，(3.3.7)，§3.3 の問題 5 ）．

例 (2.1.4)　(i)　Minkowski 線型空間 $\boldsymbol{V}^{(n,1)}$ に対し，$\boldsymbol{M} := \boldsymbol{V}^{(n,1)}$，$\boldsymbol{V} := \boldsymbol{V}^{(n,1)}$ と置く．$P\in \boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V}$ の演算により，

$$P+\boldsymbol{a}$$

を考えれば，$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V})=(\boldsymbol{V}^{(n,1)}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ はアフィン空間である（[4]，(3.1.6)）．さらに $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{(n,1)}$ は Minkowski 内積をもつから，$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V})=(\boldsymbol{V}^{(n,1)}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ は自然に Minkowski 空間となる．

(ii)　自然内積による列ベクトルの線型空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}=\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ は，自然に Mink-

owski 空間 $(\boldsymbol{R}^{n+1}, \boldsymbol{R}^{(n,1)})$ となる．

命題と定義 (2.1.5) 同じ次元の Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}_1^m, \boldsymbol{V}_1^{(n,1)})$ から $(\boldsymbol{M}_2^m, \boldsymbol{V}_2^{(n,1)})$ へのアフィン写像

$$(f, \boldsymbol{f}) : (\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{V}_1) \rightarrow (\boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{V}_2)$$

について，つぎの(1)と(2)とは同値である．この条件が成り立つとき，$(f, \boldsymbol{f})$ を Minkowski 空間の**計量同型写像**という．**Minkowski 同型写像**ともいう．

(1) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}_1, \quad \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \rangle_M$

(2) $\forall P, Q \in \boldsymbol{M}_1,$

$$\langle \overrightarrow{f(P)f(Q)} \mid \overrightarrow{f(P)f(Q)} \rangle_M = \langle \overrightarrow{PQ} \mid \overrightarrow{PQ} \rangle_M$$

証明 (1)⇒(2) $\langle \overrightarrow{f(P)f(Q)} \mid \overrightarrow{f(P)f(Q)} \rangle_M$

$$= \langle \boldsymbol{f}(\overrightarrow{PQ}) \mid \boldsymbol{f}(\overrightarrow{PQ}) \rangle_M = \langle \overrightarrow{PQ} \mid \overrightarrow{PQ} \rangle_M$$

(1)⇐(2) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$ と表せば

$$\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \rangle_M = \langle \overrightarrow{f(P)f(Q)} \mid \overrightarrow{f(P)f(Q)} \rangle_M = \langle \overrightarrow{PQ} \mid \overrightarrow{PQ} \rangle_M = \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \rangle_M$$

次に，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}_M$ に対し

$$\begin{aligned} 2\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \rangle_M &= \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \rangle_M \\ &\quad - \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \rangle_M - \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \rangle_M \\ &= \langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle_M - \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \rangle_M - \langle \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{b} \rangle_M \\ &= 2\langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \rangle_M \end{aligned}$$

(証明終)

例 (2.1.6) Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}^m, \boldsymbol{V}_M)$ において，

(i) (**ベクトル解析の基本定理**) 位置 $O \in \boldsymbol{M}$ を定めるとき，写像 f : $\boldsymbol{M} \rightarrow \boldsymbol{V}_M$, $P \mapsto \overrightarrow{OP}$ と $1_V : \boldsymbol{V}_M \rightarrow \boldsymbol{V}_M$ を考えると，$Q = P + \boldsymbol{a}$ のとき，$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a}$,

$$f(P+\boldsymbol{a}) = f(Q) = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{a} = f(P) + \boldsymbol{a}$$

だから，$f(P+\boldsymbol{a}) = f(P) + 1_V \boldsymbol{a}$ が成り立つから，

$$(f, 1_V) : (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M) \rightarrow (\boldsymbol{V}_M, \boldsymbol{V}_M)$$

はアフィン同型であって ([4], (3.3.6))，しかも

$$\langle 1_V(\boldsymbol{a}) \mid 1_V(\boldsymbol{b}) \rangle = \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \rangle$$

を満たすから，f は計量同型写像

$$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M) \cong (\boldsymbol{V}_M, \boldsymbol{V}_M)$$

である．この事実があるので，Minkowski 空間の幾何学において，点 $P \in \boldsymbol{M}$

をベクトル $\overrightarrow{OP} \in \boldsymbol{V}_M$ で表すことができるのである．

（ii）$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M) = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ の Minkowski 枠 $\Sigma = (O : \boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を定めたとき，写像

$$f = \mathrm{Coord}_{(O;e_i)} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \qquad P = O + p_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + p_n\boldsymbol{e}_n \mapsto \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{Coord}_{(e_i)} : \boldsymbol{V}_M \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \qquad \boldsymbol{a} = a_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n \mapsto \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

を考えると，$f(P \dotplus \boldsymbol{a}) = f(P) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$

$$(\mathrm{Coord}_{(O;e_i)}, \mathrm{Coord}_{(e_i)}) : (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M) \to (\boldsymbol{R}^{(n,1)}, \boldsymbol{R}^{(n,1)})$$

はアフィン同型である（[4]，(3.3.6)）．さらに $(\mathrm{Coord}_{(O;e_i)}, \mathrm{Coord}_{(e_i)})$ は Minkowski 空間の計量同型でもある．

定義（2.1.7）$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ を Minkowski 空間とする．写像 $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ について，

「$\forall P, Q \in \boldsymbol{M}$

$$\langle \overrightarrow{f(P)f(Q)} \mid \overrightarrow{f(P)f(Q)} \rangle_M = \langle \overrightarrow{PQ} \mid \overrightarrow{PQ} \rangle_M$$」

が成り立つことを，f は**非斉次 Minkowski 変換**または**非斉次 Lorentz 変換**であるという．$\boldsymbol{M}$ の非斉次 Minkowski 変換の全体を $\boldsymbol{P}_M$ で表し，$\boldsymbol{M}$ の**全非斉次 Lorentz 群**または**全 Poincare 群**という．

命題（2.1.8）（i）写像 $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ について，つぎが成り立つ．

(1)　f は非斉次 Minkowski 変換である

⇔　(2)　f はアフィン変換 $f = (f, \boldsymbol{f})$ であって，

$$\boldsymbol{f} \in L(\boldsymbol{V}^{(n,1)})$$

⇔　(3)　$(f, \boldsymbol{f}) : (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)}) \to (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$

は $(\boldsymbol{M}^m, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ から $(\boldsymbol{M}^m, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ 自身への計量同型写像である．

（ii）したがって，全 Poincare 群 $\boldsymbol{P}_M$ はアフィン空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ のアフィン変換の全体 $\boldsymbol{G}_M$ の部分群である．$\boldsymbol{P}_M \subseteqq \boldsymbol{G}_M$

証明　$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{(n,1)}$ と置く．

(2)⇒(3) は (2.1.5) の直接の結果である．(3)⇒(1)は当然．

(1)⇒(2) 位置 $O\in\boldsymbol{M}$ を定めておく．$\boldsymbol{f}\in Map(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$ を

$$\forall X\in\boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{f}(\overrightarrow{OX}) := \overrightarrow{f(O)f(X)}$$
$$f(X)=f(O)+\boldsymbol{f}(\overrightarrow{OX})$$

で定義する．$\forall \boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$，$\boldsymbol{y}=\overrightarrow{OY}\in\boldsymbol{V}$ に対し，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})&=\overrightarrow{f(O)f(X)}-\overrightarrow{f(O)f(Y)}\\&=\overrightarrow{f(Y)f(O)}+\overrightarrow{f(O)f(X)}\\&=\overrightarrow{f(Y)f(X)}\end{aligned}$$
$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{YX}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\rangle_M\\&=\langle\overrightarrow{f(Y)f(X)} \mid \overrightarrow{f(Y)f(X)}\rangle_M\\&=\langle\overrightarrow{YX} \mid \overrightarrow{YX}\rangle_M=\langle \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle_M\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{P}_V$ であるが (1.2.8)，この場合，$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ はアフィン写像である．特に $\boldsymbol{o}=\overrightarrow{OO}\in\boldsymbol{V}$ に対し，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{o})=f(\overrightarrow{OO})=\overrightarrow{f(O)f(O)}=\boldsymbol{o}$$

であるから，$\boldsymbol{f}$ は線型写像である．∴ $\boldsymbol{f}\in GL(\boldsymbol{V})\cap\boldsymbol{P}_V=L(\boldsymbol{V})$ （証明終）

命題 (2.1.9) Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{(n,1)}$，$\boldsymbol{G}_M$ を $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V})$ の全単射アフィン変換の全体，$\boldsymbol{P}_M$ を $\boldsymbol{M}$ の全 Poincare 群とする．

(i) $(f, \boldsymbol{f})\in\boldsymbol{G}_M$ に対し

$$(f, \boldsymbol{f})\in\boldsymbol{P}_M \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{f}\in L(\boldsymbol{V})$$

(ii) $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{V}$ が定める平行移動

$$f_a: \boldsymbol{M}\ni X\mapsto f_a(X)=X+\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{M}$$

は非斉次 Lorentz 変換，したがってアフィン写像である．

$$\boldsymbol{V}^{(n,1)}=(\text{平行移動の全体})\subseteqq\boldsymbol{P}_M\subseteqq\boldsymbol{G}_M$$

である．$\boldsymbol{M}$ の平行移動の全体 $\boldsymbol{V}$ は全 Poincare 群 $\boldsymbol{P}_M$ の正規部分群である．

写像 $\sigma: \boldsymbol{P}_M\to GL(\boldsymbol{V})$，$(f, \boldsymbol{f})\mapsto\boldsymbol{f}$ の像は $L(\boldsymbol{V})$ であって，$\mathrm{Ker}\,\sigma=\boldsymbol{V}$ である．特に $\boldsymbol{V}$ は，$\boldsymbol{P}_M$ の正規部分群である．

$$\boldsymbol{V}\subseteqq\boldsymbol{P}_M\subseteqq\boldsymbol{G}_M$$

(iii) 写像 $\sigma: \boldsymbol{P}_M\to L(\boldsymbol{V})$，$(f, \boldsymbol{f})\mapsto\boldsymbol{f}$ により

$$\boldsymbol{P}_M/\boldsymbol{V}\cong L(\boldsymbol{V}^{(n,1)})$$

(iv)　位置 $P \in \boldsymbol{M}$ に対し，$\boldsymbol{G}_P = \{(f, \boldsymbol{f}) \in \boldsymbol{P}_M \mid f(P) = P\}$ と置けば

$$\boldsymbol{G}_P \cong L(\boldsymbol{V})$$

証明　(i)　$\boldsymbol{P}_M \subseteqq \boldsymbol{G}_M$ なることは，(2.1.8) でのべた．

(ii)　$f_a \in \boldsymbol{V}$ はアフィン変換としては (f_a, I_V) に他ならない（[4]，§3.3 の問題5）．

$$\boldsymbol{V} \subseteqq \boldsymbol{P}_M \subseteqq \boldsymbol{G}_M$$
$$\boldsymbol{a} \mapsto (f_a, I_V)$$

(iii)　準同型 $\sigma : \boldsymbol{P}_M = \{(f, \boldsymbol{f}) \in \boldsymbol{G}_M \mid \boldsymbol{f} \in L(\boldsymbol{V})\} \to L(\boldsymbol{V})$，$(f, \boldsymbol{f}) \mapsto \boldsymbol{f}$ は全射であって，$\mathrm{Ker}\,\sigma = \boldsymbol{V}$ である．よって，準同型定理より

$$\boldsymbol{P}_M / \boldsymbol{V} = \boldsymbol{P}_M / \mathrm{Ker}\,\sigma \cong \mathrm{Im}\,\sigma = L(\boldsymbol{V}^{(n,1)})$$

(iv)　準同型 $\tau = \sigma \mid \boldsymbol{G}_P : \boldsymbol{G}_P \to L(\boldsymbol{V})$，$(f, \boldsymbol{f}) \mapsto \boldsymbol{f}$ は全射である．

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\tau \ni (f, \boldsymbol{f}) \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f} = I_V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall Q \in \boldsymbol{M},\ f(Q) = f(P) + PQ = P + PQ = Q \\ &\Leftrightarrow \quad f = I_V \quad \Leftrightarrow \quad (f, \boldsymbol{f}) = (I_V, I_V)\end{aligned}$$

よって τ は単射．　　$\therefore \quad \boldsymbol{G}_P \cong L(\boldsymbol{V})$　　（証明終）

定義 (2.1.10)　事象 $P, Q \in \boldsymbol{M}^m$ に対し

(i)　P と Q とは**時間的な関係**にある　$\Leftrightarrow$　$\exists \boldsymbol{x} \in T$，$Q = P + \boldsymbol{x}$

$\Leftrightarrow$　$\exists \boldsymbol{x} \in T$，$P = Q + \boldsymbol{x}$

(ii)　P は Q の**過去**にある　$\Leftrightarrow$　$\exists \boldsymbol{x} \in T^{\uparrow}$，$Q = P + \boldsymbol{x}$

$\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{PQ} \in T^{\uparrow}$

と定める．Q は P の**未来**にあるともいう．$P < Q$ とも表す．

(iii)　$P + T^{\uparrow} := \{P + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in T^{\uparrow}\} = \{Q \in \boldsymbol{M} \mid P < Q\}$ を P の**未来**

$P + T^{\downarrow} := \{P + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in T^{\downarrow}\} = \{Q \in \boldsymbol{M} \mid Q < P\}$ を P の**過去**

$P + \mathcal{C} := \{P + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}\}$ を P を頂点とする**光円錐**

という．

$$P + T := \{P + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in T\} = \{Q \in \boldsymbol{M} \mid P \text{ と } Q \text{ は時間的関係にある}\}$$

と置く．

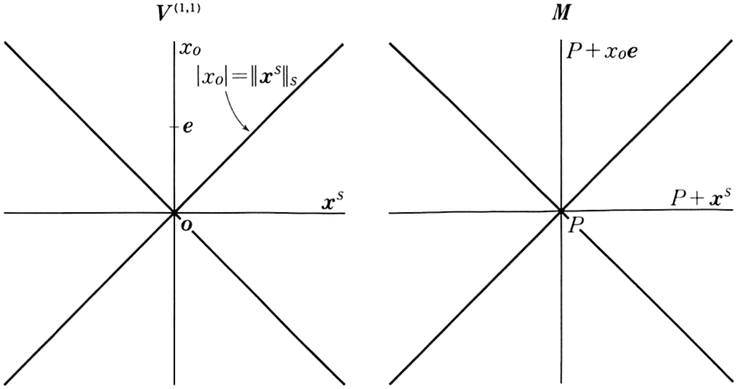


図 2.1

$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，$P \in \boldsymbol{M}$ を定めたとき

命題 (2.1.11)

(i) $P + T = (P + T^{\uparrow}) \cup (P + T^{\downarrow})$ すなわち

P と Q とが時間的関係にある $\Leftrightarrow$ $P < Q$ または $Q < P$

(ii) $P \not< P$, (iii) $P < Q$, $Q < R$ $\Rightarrow$ $P < R$

証明 (i) $T = T^{\uparrow} \cup T^{\downarrow}$ による．

(ii) $\overrightarrow{PP} = \boldsymbol{o}^M \notin T^{\uparrow}$

(iii) $\overrightarrow{PQ} \in T^{\uparrow}$, $\overrightarrow{QR} \in T^{\uparrow}$ ならば (1.4.3)

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \in T^{\uparrow}$$ (証明終)

確認と復習 (2.1.12) (i) 2つのアフィン空間 $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{V}')$，$(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{V}'')$ に対し

$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{A}''$ (集合の直積)，$\boldsymbol{V} := \boldsymbol{V}' \oplus \boldsymbol{V}''$ (線型空間の直和)

と置き，$P = (P', P'') \in \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'') \in \boldsymbol{V}$ に対し

$$P + \boldsymbol{a} := (P' + \boldsymbol{a}', P'' + \boldsymbol{a}'')$$

と置けば，$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ はアフィン空間となる．これを $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{V}')$ と $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{V}'')$ の**直積**といい，

$$(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{V}') \times (\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{V}'') \quad \text{または} \quad \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{A}''$$

と表す．$\dim(\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{A}'')=\dim\boldsymbol{A}'+\dim\boldsymbol{A}''$ である．

（ii）　アフィン空間 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ の同伴線型空間 $\boldsymbol{V}$ が部分線型空間の直和

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}'\oplus\boldsymbol{V}''$$

になっているとき，位置 $O\in\boldsymbol{A}$ を定め，$\boldsymbol{A}':=O+\boldsymbol{V}'$，$\boldsymbol{A}'':=O+\boldsymbol{V}''$ と置けば，$(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{V}')$ と $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{V}'')$ は $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ の部分アフィン空間であって，

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})\cong(\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{V}'\oplus\boldsymbol{V}'')\quad\text{（アフィン同型）}$$

となる．

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}'\oplus\boldsymbol{V}'',\qquad \boldsymbol{a}\leftrightarrow\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}''$$

$$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{A}'',\qquad O+\boldsymbol{a}\leftrightarrow(O+\boldsymbol{a}', O+\boldsymbol{a}'')$$

定義（2.1.13）　Minkowski 線形空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，

（i）　単位未来ベクトル $\boldsymbol{e}\in T^{\uparrow}_{U}\subseteqq\boldsymbol{V}$ と位置 $O\in\boldsymbol{M}$ との組 $(O, \boldsymbol{e})$ を**慣性系**または**観測者**という．このとき，

（ii）　$\boldsymbol{e}$ による Lorentz 分解 $Obs_{\boldsymbol{e}}$：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\oplus\boldsymbol{V}^{S}(\boldsymbol{e})\cong\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{V}^{S}(\boldsymbol{e}),\qquad \boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^{S}\rightarrow(x, \boldsymbol{x}^{S})$$

は全単射（1.3.8），写像

$$\boldsymbol{M}\rightarrow\boldsymbol{V}_{M},\qquad X=O+\boldsymbol{x}\leftrightarrow\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{x}$$

も全単射であるから，写像

$$\boldsymbol{M}\rightarrow\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}^{S}_{O}(\boldsymbol{e})$$

$$X=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^{S}\leftrightarrow(x, \boldsymbol{x}^{S})$$

は全単射である．この全単射を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ による M の **Minkowski 分解**といい，

$$Obs_{(O,e)}\quad\text{または}\quad Obs$$

で表す．$Obs_{(O,e)}(X)=(x, \boldsymbol{x}^{S})$ を X の **Minkowski 座標**という．$(O, \boldsymbol{e})$ を定めたとき，X はその Minkowski 座標 $(x, \boldsymbol{x}^{S})$ により完全に定まる．

（iii）　$\boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e}):=O+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}=\{O+x\boldsymbol{e}\mid x\in\boldsymbol{R}\}$

$\boldsymbol{E}^{S}_{O}(\boldsymbol{e}):=O+\boldsymbol{V}^{S}(\boldsymbol{e})=\{O+\boldsymbol{x}^{S}\mid \boldsymbol{x}^{S}\in\boldsymbol{V}^{S}(\boldsymbol{e})\}$

と置けば，$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_{M})$ は2つのアフィン空間 $(\boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e}), \boldsymbol{R}\boldsymbol{e})$ と $(\boldsymbol{E}^{S}_{O}(\boldsymbol{e}), \boldsymbol{V}^{S}(\boldsymbol{e}))$ の直積となる．

$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_{M})$ に関する量を**時空量**という．慣性系によらないという意味で**時空不変量**または**時空不変式**ともいう．**Minkowski 不変量**または **Minkowski 不**

変式ともいう．$\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$ に関する量を**空間量**，**慣性量**または**慣性不変量**という．厳密にいえば，集合 S と写像 $\Phi : S \to \boldsymbol{M}$ または $\Psi : S \to \boldsymbol{V}_M$ があるとき，$\Phi(X) \in \boldsymbol{M}$，$\Psi(X) \in \boldsymbol{V}_M$ $(X \in S)$ を S 上の Minkowski 不変量という．写像 $\Phi : S \to \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$ や写像 $\Psi : S \to \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ の像 $\Phi(X) \in \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$，$\Psi(X) \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ が S 上の慣性不変量である．

(iv) Minkowski 分解

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e}), \qquad O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S \leftrightarrow (O + x\boldsymbol{e}, O + \boldsymbol{x}^S)$$

において

$$\text{位置 } O = O + 0\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$$

を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ の**現在**という．

事象 $\boldsymbol{M} \ni X = O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S$ に対し，

$$\text{位置 } O + x\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$$

を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における X の**時刻**または**慣性時刻**という．$x\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}$，$x \in \boldsymbol{R}$ をも**慣性時刻**という．

$$\text{位置 } O + \boldsymbol{x}^S \in \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$$

を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における X の**空間位置**という．

$$\text{位置 } O + x\boldsymbol{e} = (x, \boldsymbol{o}^S) \in x\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$$

を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ の時刻 $x\boldsymbol{e}$ における**基準点**または**原点**という．$(O ; \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \boldsymbol{M} \times \mathcal{U}^\downarrow_\uparrow$ であれば，$(O + x\boldsymbol{e} ; \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ は時刻 $x\boldsymbol{e}$ における Euclid 空間 $\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e}) \cong x\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$ の正の向きの直交枠である．

系 (2.1.14) 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ が定める Minkowski 分解 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$ において，位置 $X, Y \in \boldsymbol{M}$ について

$$X = O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S, \qquad Y = O + y\boldsymbol{e} + \boldsymbol{y}^S \in O + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

のとき

(i) $(O, \boldsymbol{e})$ において，(X の時刻)＝(Y の時刻)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad x\boldsymbol{e} = y\boldsymbol{e} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{XY} \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{XY} \perp \boldsymbol{e} \end{aligned}$$

(ii) 同時刻の概念は，単位未来ベクトル $\boldsymbol{e}$ にのみ依存し，時空位置 O の

取り方にはよらない．

(iii) $X<Y \quad \Leftrightarrow \quad y>x+\|\boldsymbol{y}^S-\boldsymbol{x}^S\|_S \quad \Rightarrow \quad x<y$

証明 (i) $x=y \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{XY}=(y-x)\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{y}^S-\boldsymbol{x}^S)\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ による．

(ii) 条件 $\overrightarrow{XY}\perp\boldsymbol{e}$ は位置 O によらない．

(iii)
$$
\begin{aligned}
X<Y \quad &\Leftrightarrow \quad T^{\uparrow}\ni\overrightarrow{XY}=(y-x)\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{y}^S-\boldsymbol{x}^S)\\
&\Leftrightarrow \quad y-x>\|\boldsymbol{y}^S-\boldsymbol{x}^S\|_S\geqq 0\\
&\Rightarrow \quad y-x>0
\end{aligned}
$$
(証明終)

命題 (2.1.15) Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ と事象 $X\in\boldsymbol{M}$，$X\neq O$ について，

$$X\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})=O+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \quad \Rightarrow \quad X<O \text{ または } X>O$$

逆は必ずしも真ではない．

$$X\in\boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{e})=O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX}\perp\boldsymbol{e}$$

証明
$$
\begin{aligned}
X\in O+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX}\in\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OX}\in T\\
&\Leftrightarrow \quad X<O \text{ または } X>O\\
X\in O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX}\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX}\perp\boldsymbol{e}
\end{aligned}
$$
(証明終)

命題 (2.1.16) (座標枠の原点の移動) Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，$\boldsymbol{e}\in T_U^{\uparrow}$，$\forall O, P\in\boldsymbol{M}$ とし，

$$\overrightarrow{OP}=p_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{p}_{(O,e)}\in\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

とする．2つの慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$，$(P, \boldsymbol{e})$ に関し，事象 $X\in\boldsymbol{M}$ が

$$X=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}, \qquad X=P+y\boldsymbol{e}+\boldsymbol{y}_{(P,e)}, \qquad \boldsymbol{x}_{(O,e)},\ \boldsymbol{y}_{(P,e)}\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

とする．このとき，

$$(x, \boldsymbol{x}_{(O,e)})=(p_0+y, \boldsymbol{p}_{(O,e)}+\boldsymbol{y}_{(P,e)})$$

特に，P と O とが $\boldsymbol{e}$ に関し同時刻ならば，$p_0=0$ だから

$$x=y$$

証明 $\overrightarrow{OX}=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}$，$\overrightarrow{PX}=y\boldsymbol{e}+\boldsymbol{y}_{(P,e)}\in\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$

$$
\begin{aligned}
x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}&=\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}\\
&=(p_0+y)\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{p}_{(O,e)}, \boldsymbol{y}_{(P,e)})
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad x=p_0+y, \qquad \boldsymbol{x}_{(O,e)}=\boldsymbol{p}_{(O,e)}+\boldsymbol{y}_{(P,e)}$$
(証明終)

注意 我々の住んでいる空間は Euclid 空間であって，その中に Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M)$ 内の図形 $S\subseteqq\boldsymbol{M}$ を画くことはできない．しかしながら線型空間

$\boldsymbol{Re}\times \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ において $(x,\boldsymbol{x}^S)$ と $(y,\boldsymbol{y}^S)$ との内積を

$$\langle(x,\boldsymbol{x}^S)\mid(y,\boldsymbol{y}^S)\rangle_E=xy+\langle\boldsymbol{x}^S\mid\boldsymbol{y}^S\rangle_S$$

と定めれば，$\boldsymbol{Re}\times \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ は Euclid 線型空間となり，そこでは図を画くことができる．そこで Minkowski 分解

$$Obs:\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{Re}\times\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}),\qquad X=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^S\to(x,\boldsymbol{x}^S)$$

による図形 S の像 $Obs(S)$ で代用することがある．たとえば図 2.1 の光円錐 $P+\mathscr{C}$ は，$Obs_{(P,\boldsymbol{e})}(P+\mathscr{C})$ を見れば円錐と呼ばれるのに相応しい．

定義（2. 1. 17）$(\boldsymbol{M},\boldsymbol{V}_M)$ を Minkowski 空間とする．Minkowski 線型空間 $\boldsymbol{V}_M$ とその双対空間 $(\boldsymbol{V}_M)^*$ との間の自然写像 $\mu:\boldsymbol{V}_M\to(\boldsymbol{V}_M)^*$ は単なる同型写像ではなく計量同型であって，しかも順時的であった．

$$\boldsymbol{V}_M\cong(\boldsymbol{V}_M)^*,\qquad \boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}^*=\langle\boldsymbol{a}\mid -\rangle_M$$

（i）写像 $\boldsymbol{M}\times(\boldsymbol{V}_M)^*\to\boldsymbol{M}$，$(P,\boldsymbol{a}^*)\mapsto P+\boldsymbol{a}^*$ を

$$P+\boldsymbol{a}^*:=P+\boldsymbol{a}$$

と定義する．このとき $(\boldsymbol{M},(\boldsymbol{V}_M)^*)$ はMinkowski空間となる．これを $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{V}_M)$ の**双対 Minkowski 空間**という．

（ii）

$$(1_M,\mu):(\boldsymbol{M},\boldsymbol{V}_M)\to(\boldsymbol{M},(\boldsymbol{V}_M)^*)$$

はアフィン同型写像である．さらに順時的 Minkowski 写像である．

証明（i）(1)　$\forall\boldsymbol{a}^*\in(\boldsymbol{V}_M)^*$ に対し，写像 $g_{\boldsymbol{a}^*}=f_{\boldsymbol{a}}:\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{M}$ が定まる．

(2)　$\forall P,Q\in\boldsymbol{M}$，$\exists_1\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{V}_M$，$Q=P+\boldsymbol{a}=P+\boldsymbol{a}^*$

(3)　$\forall P\in\boldsymbol{M}$，$\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{V}_M$，

$$\begin{aligned}(P+\boldsymbol{a}^*)+\boldsymbol{b}^*&=(P+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\\&=P+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=P+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^*\\&=P+(\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{b}^*)\end{aligned}$$

（ii）$\forall P\in\boldsymbol{M}$，$\forall\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{V}_M$，

$$1_M(P+\boldsymbol{a})=P+\boldsymbol{a}=P+\boldsymbol{a}^*=1_M(P)+\mu(\boldsymbol{a})$$

だから，$(1_M,\mu)$ はアフィン同型写像である．

単位未来ベクトル $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}_M$ を定めたとき，$(\boldsymbol{V}_M)^*$ における未来の定義より（1. 5. 8），$\mu(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}^*\in(\boldsymbol{V}_M)^*$ が未来ベクトルである．

$$\mu(a\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}^S)=a\boldsymbol{u}^*+(\boldsymbol{a}^S)^*$$

（証明終）

したがって

$$\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}^*,\qquad \boldsymbol{V}_M\cong(\boldsymbol{V}_M)^*,\qquad (\boldsymbol{M},\boldsymbol{V}_M)\cong(\boldsymbol{M},(\boldsymbol{V}_M)^*)$$

である．

§2.2　Newton 宇宙 $(\boldsymbol{E}^N, \boldsymbol{V}^N)$

Newton 力学について復習する．

復習と確認 (2.2.1)　$(\boldsymbol{E}^S, \boldsymbol{V}^S)$ を 3 次元の有向 Euclid 空間とみた普通の物理空間，$(\boldsymbol{E}^T, \boldsymbol{V}^T)$ を 1 次元の有向 Euclid 空間とみた時刻空間とする([4]，(4.2.2))．$\boldsymbol{V}^S$ の内積を $\langle\ |\ \rangle_S$ で，$\boldsymbol{V}^T$ の内積を $\langle\ |\ \rangle_T$ で表す．$\boldsymbol{V}^T$ のただ1つの単位未来ベクトルを $\boldsymbol{e}_T$ とする．したがって $\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_T$ である．2つのアフィン空間 $(\boldsymbol{E}^T, \boldsymbol{V}^T)$，$(\boldsymbol{E}^S, \boldsymbol{V}^S)$ の直積 $(\boldsymbol{E}^N, \boldsymbol{V}^N)$ を考える (2.1.4)．

$$\boldsymbol{E}^N=\boldsymbol{E}^T\times\boldsymbol{E}^S,\qquad \boldsymbol{V}^N=\boldsymbol{V}^T\oplus\boldsymbol{V}^S \qquad \cdots①$$

位置 $P=(P^T, P^S)\in\boldsymbol{E}^N=\boldsymbol{E}^T\times\boldsymbol{E}^S$,

ベクトル $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{a}^S\in\boldsymbol{V}^N,\quad a\boldsymbol{e}_T\in\boldsymbol{V}^T,\quad \boldsymbol{a}^S\in\boldsymbol{V}^S$

に対し

$$P+\boldsymbol{a}:=(P^T+a\boldsymbol{e}_T,\ P^S+\boldsymbol{a}^S)$$

(i)　直和 $\boldsymbol{V}^N=\boldsymbol{V}^T\oplus\boldsymbol{V}^S=\{x\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{x}^S \mid x\in\boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}^S\in\boldsymbol{V}^S\}$ において，$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{x}^S$，$\boldsymbol{y}=y\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{y}^S\in\boldsymbol{V}^N$ に対し

$$\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M:=-xy+\langle\boldsymbol{x}^S\mid\boldsymbol{y}^S\rangle_S$$

と置けば，$(\boldsymbol{V}^N, \langle\ |\ \rangle_M)$ は 4 次元 Minkowski 線型空間となり，$(\boldsymbol{E}^N, \boldsymbol{V}^N)$ は 4 次元の Minkowski 空間となる．これを **Newton 宇宙**という．

(ii)　$T=$(時間性ベクトルの全体)

$$:=\{\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{x}^S \mid \langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=-t^2+\|\boldsymbol{x}^S\|_S{}^2<0\}$$

$$=\{t\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{x}^S \mid |t|>\|\boldsymbol{x}^S\|_S\}$$

$T^\uparrow=$(未来ベクトルの全体)

$$:=\{t\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{x}^S \mid t>\|\boldsymbol{x}^S\|_S\}$$

特に，$\forall\, t\boldsymbol{e}_T$，$t\neq 0$ は時間性である．

$$\because\quad \langle t\boldsymbol{e}_T\mid t\boldsymbol{e}_T\rangle_M=-t^2<0.$$

また明らかに，

$$te_T \in T^{\uparrow} \quad \Leftrightarrow \quad te_T \sim \boldsymbol{e}_T \quad \Leftrightarrow \quad t > 0$$

が成り立つ．

直交基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ が $\boldsymbol{V}^S$ の右手系のとき $(\boldsymbol{e}_T, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathcal{U}_+^{\uparrow}$ となるように，$\boldsymbol{V}^N$ に向き $\mathcal{U}_+^{\uparrow}$ を定める．こうして $\boldsymbol{V}^N$ は時間的にも空間的にも向きづけられた Minkowski 線型空間である．

$$\boldsymbol{V}^N = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_T \oplus \boldsymbol{V}^S$$

は，$\boldsymbol{e}_T$ による Minkowski 分解にほかならない．すなわち $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}_T) = \boldsymbol{V}^S$ であり，

$$\because \quad \boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{x}^S \in \boldsymbol{V}^N$$

に対し，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}_T) \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{e}_T \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_T \rangle_M = -x \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^S \in \boldsymbol{V}^S \end{aligned}$$

(iii) 時空位置 $O = (O^T, O^S) \in \boldsymbol{E}^N$ を任意に定めたとき，慣性系 $(O, \boldsymbol{e}_T)$ による分解

$$\boldsymbol{E}^N = \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}_T) \times \boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{e}_T), \qquad \boldsymbol{V}^N = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_T \oplus \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}_T)$$

は①の

$$\boldsymbol{E}^N = \boldsymbol{E}^T \times \boldsymbol{E}^S, \qquad \boldsymbol{V}^N = \boldsymbol{V}^T \oplus \boldsymbol{V}^S$$

にほかならない．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}_T) &= O + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_T = \boldsymbol{E}^T \times O^S \cong \boldsymbol{E}^T, \\ \boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{e}_T) &= O + \boldsymbol{V}^S = O^T \times \boldsymbol{E}^S \cong \boldsymbol{E}^S \end{aligned}$$

事象 $X = O + t\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{x}^S$ は

$$\boldsymbol{E}^N = \boldsymbol{E}^T \times \boldsymbol{E}^S \cong \boldsymbol{V}^N \cong \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}^S$$

に応じて

$$X = (O^T + t\boldsymbol{e}_T, O^S + \boldsymbol{x}^S) \mapsto t\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{x}^S \mapsto (t, \boldsymbol{x}^S)$$

と表される．慣性系 $(O, \boldsymbol{e}_T)$ に関する X の Minkowski 座標は $(t, \boldsymbol{x}^S)$ である．慣性系 $(O, \boldsymbol{e}_T)$ における X の慣性時刻とは，その絶対時刻

$$O + t\boldsymbol{e}_T \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}_T) = E^T$$

にほかならない．$t\boldsymbol{e}_T \in \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_T$，$t \in \boldsymbol{R}$ をも慣性時刻という．慣性系 $(O, \boldsymbol{e}_T)$ における X の空間位置とは，その絶対位置

$$O+\boldsymbol{x}^S\in\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e}_T)\cong\boldsymbol{E}^S$$

にほかならない．慣性系 $(O,\boldsymbol{e}_T)$ における X の現在とは，絶対時刻の現在

$$O^T=O+0\boldsymbol{e}_T=O\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}_T)$$

にほかならない．慣性系 $(O,\boldsymbol{e}_T)$ の時刻 $t\boldsymbol{e}_T$ における原点とは，空間位置

$$O^S+t\boldsymbol{e}_T=O+t\boldsymbol{e}_T=(t,\boldsymbol{o}^S)\in t\boldsymbol{e}_T\times\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e}_T)\cong\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e}_T)$$

である．

位置 $O\in\boldsymbol{E}^N$ を定めたとき，

$$\boldsymbol{E}^T\cong\boldsymbol{R},\ \ O+t\boldsymbol{e}_T\leftrightarrow t,\qquad \boldsymbol{E}^S\cong\boldsymbol{V}^S,\ \ O+\boldsymbol{x}^S\leftrightarrow\boldsymbol{x}^S \qquad\cdots①$$

である．

命題（2.2.2）　Newton 宇宙

$$(\boldsymbol{E}^N,\boldsymbol{V}^N)=(\boldsymbol{E}^T,\boldsymbol{V}^T)\times(\boldsymbol{E}^S,\boldsymbol{V}^S)$$

において，**質点**は時空位置 X と質量と呼ばれる正の数 m との組 (X,m) で表される．質点 (X,m) の運動は写像

$$X:\boldsymbol{E}^T\to\boldsymbol{E}^S,\qquad O+t\boldsymbol{e}_T\mapsto X(t)=O+\boldsymbol{x}^S(t) \qquad\cdots②$$

と考えられる．

仮説（2.2.3）　Newton 力学はつぎの3つの仮説より出発する．

仮説Ｉ（絶対時刻と絶対空間の仮説） 時刻の全体は1次元の Euclid 空間 $(\boldsymbol{E}^T,\boldsymbol{V}^T)$ をなし，われわれが住んでいる普通物理空間と呼ばれている広がりは3次元の Euclid 空間 $(\boldsymbol{E}^S,\boldsymbol{V}^S)$ をなす．この仮説を Newton の慣性仮説などという（[2]，(4.2.2) 参照）．

仮説II（Newton の第2仮説）　時刻 t における，質点 $(X,m(t))$ に働く力が $\boldsymbol{f}(t)$，X の速度が $\boldsymbol{v}(t)$，$\boldsymbol{p}(t)=m\boldsymbol{v}(t)$ のとき，

$$\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}\right)(t)=\boldsymbol{f}(t)$$

が成り立つ．

仮説III（作用反作用の仮説）　2つの質点 $(X_1,m_1(t))$，$(X_2,m_2(t))$ の間の相互作用は，直線 X_1X_2 に沿って働き，大きさは等しく向きは反対である．すなわち，X_i が X_j に及ぼす力を $\boldsymbol{f}_{ij}\in\boldsymbol{V}^S$ とすれば，

$$\boldsymbol{f}_{12}/\!/X_1X_2,\qquad \boldsymbol{f}_{21}/\!/X_1X_2,\qquad \boldsymbol{f}_{12}+\boldsymbol{f}_{21}=\boldsymbol{o}^S$$

が成り立つ．　　（仮説終）

命 題（2.2.4）　$\Sigma=\{(X_1, m^{(1)}(t)), \cdots, (X_N, m^{(N)}(t))\}$ を N 点系とし，$M(t):=\sum_{i=1}^{n} m^{(i)}(t)$ とする．位置 $O\in\boldsymbol{M}$ を任意に定め

$$G(t):=O+\frac{m^{(1)}(t)\overrightarrow{OX_1(t)}+\cdots+m^{(N)}(t)\overrightarrow{OX_N(t)}}{M(t)} \qquad \cdots ①$$

と置く．このとき

（i）　位置 $G(t)$ は位置 O の取り方によらない．すなわち

$$\forall P\in\boldsymbol{M},\ G(t)=P+\frac{m^{(1)}(t)\overrightarrow{PX_1(t)}+\cdots+m^{(N)}(t)\overrightarrow{PX_N(t)}}{M(t)}$$

（ii）　$X_k(t)=O+\boldsymbol{x}^{(k)}(t)$，$G(t)=O+\boldsymbol{x}^{(G)}(t)$ と置けば，①は

$$\boldsymbol{x}^{(G)}(t)=\frac{m^{(1)}(t)\boldsymbol{x}^{(1)}(t)+\cdots+m^{(N)}(t)\boldsymbol{x}^{(N)}(t)}{M(t)}$$

と同値である．

証明　（i）　$\overrightarrow{OG(t)}=\dfrac{m^{(1)}(t)\overrightarrow{OX_1(t)}+\cdots+m^{(N)}(t)\overrightarrow{OX_N(t)}}{M(t)}$

とする．$\forall P\in\boldsymbol{M}$，

$$\overrightarrow{PG(t)}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OG(t)}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{N} m^{(k)}(t)\overrightarrow{PO}+\sum_{k=1}^{N} m^{(k)}(t)\overrightarrow{OX_k(t)}}{M(t)}=\frac{\sum_{k=1}^{N} m^{(k)}(t)\overrightarrow{PX_k(t)}}{M(t)}$$

（ii）　　$\overrightarrow{OX_k(t)}=\boldsymbol{x}^{(k)}(t)$，

$$\boldsymbol{x}^G(t)=\overrightarrow{OG(t)}=\frac{\sum_{k=1}^{N} m^{(k)}(t)\overrightarrow{OX_k(t)}}{M(t)}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{N} m^{(k)}(t)\boldsymbol{x}^{(k)}(t)}{M(t)}$$

を得る．　　（証明終）

定義（2.2.5）　N 点系 $\Sigma=\{(X_1, m_1(t)), \cdots, (X_N, m_N(t))\}$ に対し，

（i）　質点 $(G, M)=(G(t), M(t))$ を Σ の**質量中心**または**重心**という．

（ii）　各質点 X_i の運動量 $\boldsymbol{p}_i(t)=m_i(t)\boldsymbol{v}_i(t)$ の総和

$$\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)=\Sigma\boldsymbol{p}_i(t)$$

を Σ の**運動量**という．

(iii)　質点系は外部からのエネルギーの出入や仕事の出入がないとき，**孤立系**であるという．

補題 (2.2.6)　正方行列

$$\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix}$$

が交代行列，すなわち $f_{ij}=-f_{ji}$ 特に $f_{ii}=0$ ならば，

$$\sum_{1\leq i,j\leq N} f_{ij}=0$$

が成り立つ．ここで f_{ij} は数に限らず，ベクトルでも同じである．

証明　$f_{ii}=0$，$f_{ij}+f_{ji}=0$ $(i\neq j)$ だから

$$\sum_{1\leq i,j\leq N} f_{ij}=\sum_i f_{ii}+\sum_{i<j}(f_{ij}+f_{ij})=0+0=0 \qquad \text{(証明終)}$$

定理 (2.2.7)　N 点系 $\Sigma=\{(X_1, m_1(t)), \cdots, (X_N, m_N(t))\}$ において，系外から X_i に働く力が $\boldsymbol{f}_i(t)\in \boldsymbol{V}^S$ であれば，

(i)　系 Σ の運動量 $\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$ の時間的変化は外力の総和 $\sum \boldsymbol{f}_i(t)$ に等しい．

$$\frac{d\boldsymbol{p}(\Sigma)}{dt}(t)=\sum \boldsymbol{f}_i(t)$$

(ii)　系 Σ の運動量 $\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$ は重心 (G, M) の運動量に等しい．

$$\frac{d\overrightarrow{M(t)G(t)}}{dt}=\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$$

(iii)

$$\frac{d^2\overrightarrow{M(t)G(t)}}{dt^2}=\sum \boldsymbol{f}_i(t)$$

証明　$X_i(t)=O+\boldsymbol{x}_i(t)$,　　$\boldsymbol{v}_i(t)=\boldsymbol{x}_i'(t)=X_i'(t)$

$$\boldsymbol{p}_i(t)=m_i(t)\boldsymbol{v}_i(t)=m_i(t)\boldsymbol{x}_i'(t), \qquad \boldsymbol{p}(\Sigma)(t)=\sum \boldsymbol{p}_i(t)$$

(i)　質点 $(X_i, m_i(t))$ に働く力は $\boldsymbol{f}_i(t)+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f}_{ji}(t)$ だから，$\boldsymbol{f}_{ii}=\boldsymbol{o}$ と置けば，

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}=\boldsymbol{f}_i(t)+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f}_{ji}(t)=\boldsymbol{f}_i(t)+\sum_j \boldsymbol{f}_{ji}(t)$$

$$\therefore\quad \frac{d\boldsymbol{p}(\Sigma)}{dt}(t)=\sum_i \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}(t)=\sum_i \boldsymbol{f}_i(t)+\sum_i\Bigl(\sum_j \boldsymbol{f}_{ji}(t)\Bigr) \qquad \cdots①$$

ところで，作用反作用の仮説より $\boldsymbol{f}_{ji}(t)=-\boldsymbol{f}_{ij}(t)$ $(i\neq j)$ だから，行列

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{11} & \cdots & \boldsymbol{f}_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{f}_{N1} & \cdots & \boldsymbol{f}_{NN} \end{bmatrix}$$

は交代行列である．よって，(2.2.7) より

$$\sum_{1\leq i,j\leq N} \boldsymbol{f}_{ij}(t)=\boldsymbol{o} \qquad \cdots ②$$

$$\therefore \quad \frac{d\boldsymbol{p}(\Sigma)}{dt}(t)=\sum_i \boldsymbol{f}_i(t)$$

(ii) 一方，$M(t)\overrightarrow{OG(t)}=\sum m_i(t)\overrightarrow{OX_i}=\sum m_i(t)\boldsymbol{x}_i(t)$ だから，①と②より，

$$(\text{質点}\,(G, M)\,\text{の運動量})=\frac{d\overrightarrow{M(t)G(t)}}{dt}=\frac{dM(t)\overrightarrow{OG(t)}}{dt}$$

$$=\sum_i \frac{dm_i(t)\boldsymbol{x}_i(t)}{dt}=\sum \boldsymbol{p}_i(t)=\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$$

(iii) $\dfrac{d^2\overrightarrow{M(t)G(t)}}{dt^2}=\dfrac{d\boldsymbol{p}(\Sigma)}{dt}(t)$ と (i) による． (証明終)

したがって，内力 ($\boldsymbol{f}_{ij}$) は重心 (G, M) の運動に関係しない．特に：

系 (2.2.8) 系外から X_i に働く力が $\boldsymbol{f}_i(t)\in \boldsymbol{V}^S$ であるとする．外力の総和が $\boldsymbol{o}$, $\sum \boldsymbol{f}_i(t)=\boldsymbol{o}$ のとき，

(i) **(運動量保存の法則)** N 点系 Σ の運動量 $\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$ は一定である．

(ii) 重心 (G, M) は等速度運動（一直線上の等速運動）を行う．特に，孤立系では $\forall \boldsymbol{f}_i(t)=\boldsymbol{o}$ であるから，

(iii) 孤立系 Σ については運動量 $\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$ が時刻によらず定数ベクトルである．

逆に運動量 $\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$ が定数ベクトルであっても，Σ は必ずしも孤立系ではない．

$\boldsymbol{p}(\Sigma)(t)$ が定値

$\Leftrightarrow$ 重心 (G, M) は一直線上の等速運動を行う

$\Leftrightarrow$ $\sum \boldsymbol{f}_i(t)=\boldsymbol{o}$ $\Leftrightarrow$ 外力の総和が $\boldsymbol{o}$

これからは質量 m は断りがなければ定数とする．

命題 (2.2.9) N 点系 $\Sigma=\{(X_1, m_1), \cdots, (X_N, m_N)\}$ の重心を (G, M) とし，$X_i(t)=O+\boldsymbol{x}_i(t)$, $G(t)=O+\boldsymbol{x}_G(t)$

$$\boldsymbol{y}_i(t)=\overrightarrow{G(t)X_i(t)}=\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{x}_G(t)$$

と置けば，

$$\Sigma\text{ の全運動エネルギー}\quad T:=\frac{1}{2}\sum m_i\left\|\frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}\right\|_s^2$$

$$\text{位置 } G \text{ に相対的な } \Sigma \text{ の全運動エネルギー}\quad T':=\frac{1}{2}\sum m_i\left\|\frac{d\boldsymbol{y}_i}{dt}\right\|_s^2$$

$$\text{重心の運動エネルギー＝公転エネルギー}\quad T_G=\frac{1}{2}M\left\|\frac{d\boldsymbol{x}_G}{dt}\right\|_s^2$$

の間には

$$T=T_G+T'$$

の関係がある．T' を N 点系 Σ の**内部エネルギー**または**自転エネルギー**という．

証明　$M\boldsymbol{x}_G=\sum m_i\boldsymbol{x}_i=\sum m_i(\boldsymbol{x}_G+\boldsymbol{y}_i)=M\boldsymbol{x}_G+\sum m_i\boldsymbol{y}_i$ より，

$$\sum m_i\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{o} \qquad \cdots①$$

$$\sum m_i\frac{d\boldsymbol{y}_i}{dt}=\boldsymbol{o} \qquad \cdots②$$

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum m_i\left\|\frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}\right\|_s^2=\frac{1}{2}\sum m_i\left\langle\frac{d\boldsymbol{x}_G}{dt}+\frac{d\boldsymbol{y}_i}{dt}\,\middle|\,\frac{d\boldsymbol{x}_G}{dt}+\frac{d\boldsymbol{y}_i}{dt}\right\rangle_s\\&=\frac{1}{2}M\left\|\frac{d\boldsymbol{x}_G}{dt}\right\|_s^2+\left\langle\frac{d\boldsymbol{x}_G}{dt}\,\middle|\,\sum m_i\frac{d\boldsymbol{y}_i}{dt}\right\rangle_s+\frac{1}{2}\sum m_i\left\|\frac{d\boldsymbol{y}_i}{dt}\right\|_s^2\end{aligned}$$

ここで，②より，第 2 項は 0 だから，

$$=T_G+T' \qquad \text{(証明終)}$$

相対性理論においては，質点 X の速さを常に光の速さ c と比べるために，X は写像

$$\boldsymbol{E}^T\to\boldsymbol{E}^T\times\boldsymbol{E}^S,\qquad O+t\boldsymbol{e}_T\mapsto X(t)=(O+ct\boldsymbol{e}_T,\,O+\boldsymbol{x}^S(t))$$

と考える方が具合がよい．これは上の同一視① (p. 92) により，写像

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^T=\boldsymbol{R}&\to\boldsymbol{E}^T\times\boldsymbol{E}^S=\boldsymbol{E}^N,\\t&\mapsto X(t)\\&=(O+ct\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{x}^S(t))\\&=O+ct\boldsymbol{e}_T+\boldsymbol{x}^S(t)\end{aligned}\qquad\cdots③$$

と考えてよい．この写像を質点 (X, m) の**世界線**という．X の運動はその世界

線により定まる．このとき

命題（2.2.10）（i）X が定速度運動をする．

$\Leftrightarrow$　X の世界線はアフィン空間 $\boldsymbol{E}^N$ の直線である．

（ii）（X の速さ）$=\|\boldsymbol{x}^{S\prime}(t)\|_S < c$　$\Leftrightarrow$　$X'(t) \in T^{\uparrow}$ が成り立つ．

証明

$$X(t) = O + cte_T + \boldsymbol{x}^S(t)$$

現在 $O^T = 0 \in \boldsymbol{E}^T \cong \boldsymbol{R}$ における X の時空位置を

$$X(0) = O + c0\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{x}^S(0) = O + \boldsymbol{a}^S \in \boldsymbol{E}^N$$

$$\boldsymbol{x}^S(0) = \boldsymbol{a}^S$$

とする．

（i）X が定速度 $\boldsymbol{x}^{S\prime}(t) = \boldsymbol{b}^S$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x}^S(t) = \boldsymbol{a}^S + t\boldsymbol{b}^S$

$\Leftrightarrow$　$X(t) = O + ct\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{x}^S(t) = O + \boldsymbol{a}^S + (c\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{b}^S)t$

が t の 1 次式

（ii）$X(t) = O + ct\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{x}^S(t)$ を微分すれば，

$$X'(t) = c\boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{x}^{S\prime}(t)$$

$$\langle X'(t) \mid X'(t) \rangle_M = -c^2 + \|\boldsymbol{x}^{S\prime}(t)\|_S{}^2$$

$$\therefore\quad \|\boldsymbol{x}'(t)\|_S < c \quad\Leftrightarrow\quad \langle X'(t) \mid X'(t) \rangle_M < -c^2 + c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad X'(t) \in T^{\uparrow} \quad (1.4.3)$$

（証明終）

§2.2 の練習問題

問題 1.　$N+1$ 点系 $\Sigma_{N+1} = \{(X_1, m_1), \cdots, (X_N, m_N), (X_{N+1}, m_{N+1})\}$ の重心を

$$(G_{N+1}, M_{N+1})$$

N 点系 $\Sigma_N = \{(X_1, m_1), \cdots, (X_N, m_N)\}$ の重心を

$$(G_N, M_N)$$

2 点系 $\{(G_N, M_N), (X_{N+1}, m_{N+1})\}$ の重心を

$$(H, m)$$

とする．このとき

$$(H, m) = (G_{N+1}, M_{N+1})$$

答

1.

$$m = M_N + m_{N+1} = \sum_{k=1}^{N} m_k + m_{N+1} = M_{N+1}$$

は当然である．また，

$$\overrightarrow{OH(t)}=\frac{M_N\overrightarrow{OG_N(t)}+m_{N+1}\overrightarrow{OX_{N+1}(t)}}{m}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{N}m_k\overrightarrow{OX_k(t)}+m_{N+1}\overrightarrow{OX_{N+1}(t)}}{M_{N+1}}=\overrightarrow{OG_{N+1}(t)}$$

$$\therefore\quad (H, m)=(G_{N+1}, M_{N+1})$$

§2.3　劣光速世界線 $X_{(O,e)}$ の定義・慣性時刻 $\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$

Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，2つの径数曲線

$$C : \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{M},\ t\mapsto C(t)\quad と\quad \Gamma : \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{M},\ s\mapsto\Gamma(s)$$

について，$\mathrm{Im}\,C=\mathrm{Im}\,\Gamma$ であっても，一般には写像 $C(t)$ と写像 $\Gamma(s)$ とは異なる．写像 $C(t)$ から写像 $\Gamma(s)$ に移ることを径数を変換するという．以下慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ において慣性時刻 $O+t\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ を実数 $t\in\boldsymbol{R}$ で表し，時刻空間 $\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ と $\boldsymbol{R}$ を同一視することが多い．

$$\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\cong\boldsymbol{R},\qquad O+t\boldsymbol{e}\leftrightarrow t$$

Newton 宇宙 $\boldsymbol{E}^N=\boldsymbol{E}^T\times\boldsymbol{E}^S$ では，世界線とは過去から未来への世界点の移動 $C : \boldsymbol{E}^T\cong\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{E}^N=\boldsymbol{E}^T\times\boldsymbol{E}^S$ と考えられた (2.1.2)．Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ においても，同様に定義したいが，そのために前世界線について先ず考える．

定義 (2.3.1)　集合 $X\subseteqq\boldsymbol{M}$ が前世界線とは，条件

「∃ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$，∃ C^∞ 級の写像 $\Gamma : \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{M}$，

(1)　$X=\mathrm{Im}\,\Gamma$

(2)　$t_1<t_2$　ならば　$\Gamma(t_1)<\Gamma(t_2)$　　　…①　」

を満たすことである．ここで条件①について考えてみる．

補題 (2.3.2)　C^1 級の写像 $\Gamma : \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{M}$ とその微分係数 $\Gamma'(t)\in\boldsymbol{V}^{(n,1)}$ について，

(i)「$\forall t_1<t_2\Rightarrow\Gamma(t_1)<\Gamma(t_2)$」が成り立つならば

「$\forall t\in\boldsymbol{R},\ \Gamma'(t)\in T^{\uparrow}\cup\mathscr{C}\cup\{\boldsymbol{o}^M\}$

とくに

$\forall t\in\boldsymbol{R},\ \langle\Gamma'(t)\mid\Gamma'(t)\rangle_M\leqq 0$」

を満たす．逆に，

（ii）「$\forall t \in \boldsymbol{R}$，$\Gamma'(t) \in T^{\uparrow}$」が成り立つならば

$$「\forall t_1 < t_2 \Rightarrow \Gamma(t_1) < \Gamma(t_2)」$$

が成り立つ．特に Γ は単射である．

証明　$\forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ を定め，

$$\overrightarrow{O\Gamma(t)} = x(t)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S(t) \in \boldsymbol{V}^{(n,1)} = \boldsymbol{Re} \oplus \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

$$\Gamma(t) = O + x(t)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S(t)$$

と表す．

（i）$t_0 < t$ のとき

$$T^{\uparrow} \in \overrightarrow{\Gamma(t_0)\Gamma(t)} = \overrightarrow{O\Gamma(t)} - \overrightarrow{O\Gamma(t_0)}$$

$$= (x(t) - x(t_0))\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{x}^S(t) - \boldsymbol{x}^S(t_0))$$

$$\therefore \quad x(t) - x(t_0) = |\, x(t) - x(t_0) \,|$$

$$> \|\boldsymbol{x}^S(t) - \boldsymbol{x}^S(t_0)\|_S$$

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} > \frac{\|\boldsymbol{x}^S(t) - \boldsymbol{x}^S(t_0)\|_S}{t - t_0}$$

$$x'(t_0) \geqq \|\boldsymbol{x}^{S\prime}(t_0)\|_S \geqq 0$$

したがって，$\Gamma'(t_0) = x'(t_0)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^{S\prime}(t_0)$ に対し，

$$\langle \Gamma'(t_0) \mid \Gamma'(t_0) \rangle_M$$

$$= -x'(t_0)^2 + \|\boldsymbol{x}^{S\prime}(t_0)\|_S{}^2 \leqq 0$$

$$\therefore \quad \Gamma'(t_0) \neq \boldsymbol{o}^M \text{ ならば，} \Gamma'(t_0) \in T^{\uparrow} \cup \mathscr{C}$$

（ii）　「$t_1 < t_2$ のとき，$\Gamma(t_1) < \Gamma(t_2)$」

なることを示したい．仮定により

$$T^{\uparrow} \ni \Gamma'(t) = x'(t)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^{S\prime}(t) \sim \boldsymbol{e}$$

よって，$x'(t) = |x'(t)| > \|\boldsymbol{x}^{S\prime}(t)\|_S \geqq 0$

$$\therefore \quad \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt > \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{x}^{S\prime}(t)\|_S\,dt$$

$$\geqq \left\| \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{x}^{S\prime}(t)\,dt \right\|_S$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}$$

$$= (x(t_2) - x(t_1))\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{x}^S(t_2) - \boldsymbol{x}^S(t_1))$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt\boldsymbol{e}+\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{x}^{S\prime}(t)\,dt\in T^{\uparrow}$$ （証明終）

以上の物理的な考察を基にして改めてつぎのように定義する．$x=0$ なる 0 を 0_x のように，$\xi=0$ なる 0 を 0_ξ のように表す．

定義と命題（2.3.3）　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において集合 $X\subseteqq\boldsymbol{M}$ が**劣光速世界線**

$$\Leftrightarrow\quad \exists\ \text{慣性系}\ (O,\boldsymbol{e}),\quad \exists\ C^\infty\ \text{級の写像}\ X_{(O,\boldsymbol{e})}:\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{M}$$

「(1)　$X=\mathrm{Im}\ X_{(O,\boldsymbol{e})}$

(2)　$\forall x\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}),\ \ X_{(O,\boldsymbol{e})}'(x)\in T^{\uparrow}$

特に　$\langle X_{(O,\boldsymbol{e})}'(x)\mid X_{(O,\boldsymbol{e})}'(x)\rangle_{\boldsymbol{M}}<0$

(3)　$\forall x\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}),\ \ \langle\boldsymbol{e}\mid\overrightarrow{OX_{(O,\boldsymbol{e})}(x)}\rangle_{\boldsymbol{M}}=-x$」

写像 $X_{(O,\boldsymbol{e})}$ を慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ における X の**慣性時刻表示**という．

（i）上の条件は次の条件と同値である．

$$\exists_1 C^\infty\ \text{級の写像}\ \boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}:\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

「(1)　$\{O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(x)\mid x\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\}=X$

(2)　$\forall x\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}),\ \ \|\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}'(x)\|_S<1$」

（ii）$X\cap(O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}))$ は一点集合であって，

$$X\cap(O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}))=\{X_{(O,\boldsymbol{e})}(0_x)\}=\{O+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(0_x)\}$$

すなわち

$$P=X_{(O,\boldsymbol{e})}(p)\in X\cap(O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}))$$

であれば，必ず $p=0$，$P=X_{(O,\boldsymbol{e})}(0)=O+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(0_x)$ である．

（iii）$O\in X\quad\Leftrightarrow\quad X\cap(O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}))=\{O\}$

$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(0_x)=\boldsymbol{o}\quad\Leftrightarrow\quad O=X_{(O,\boldsymbol{e})}(0_x)$$

（iv）劣光速世界線は前世界線である．

証明　（i）$X_{(O,\boldsymbol{e})}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(x)$

により，$X_{(O,\boldsymbol{e})}(x)$ と $\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(x)$ とが1対1に対応する．

（ii）$X_{(O,\boldsymbol{e})}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(x)\in O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ とすれば，

$$x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(x)\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}),\qquad x\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}),$$

一方 $\boldsymbol{e}$ は時間的だから，$x=0$，$X_{(O,\boldsymbol{e})}(0_x)=O+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(0_x)$

（iii）「$O=X_{(O,\boldsymbol{e})}(x)\in\mathrm{Im}\ X_{(O,\boldsymbol{e})}$」

$\Rightarrow$「$O=O+\boldsymbol{o}\in O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$」

$\Rightarrow$(ii) より「$O\in X\cap(O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}))=$(一点集合)」

$$\therefore\quad X\cap(O+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}))=\{O\}$$

しかも，このとき(ii)より，

「$O=X_{(O,e)}(0_x)=O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(0_x)$」

$\Rightarrow$ 「$\boldsymbol{x}_{(O,e)}(0_x)=\overrightarrow{OO}=\boldsymbol{o}$」

(iv) $X_{(O,e)}{}'(x)\in T^{\uparrow}$ より，当然 X は前世界線である． (証明終)

つぎの定理は重心の所で必要である (5.1.4)．物理的には多分明白なことであろう．

定義 (2.3.4) 集合 $X\subseteq\boldsymbol{M}$ について，つぎのⅠとⅡは同値である．

Ⅰ X が劣光速の世界線である

Ⅱ $\forall(P,\boldsymbol{f})\in\boldsymbol{M}\times T^{\uparrow}_U$，$\exists_1 C^\infty$ 級の写像 $X_{(P,f)}:\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})\to\boldsymbol{M}$

「(1) $X=\mathrm{Im}\,X_{(P,f)}$

(2) $\forall y\in\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})$，　$X_{(P,f)}{}'(y)\in T^{\uparrow}$，

(3) $\forall y\in\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})$，　$\langle\boldsymbol{f}\mid\overrightarrow{PX_{(P,f)}(y)}\rangle_M=-y$」

言い換えれば，劣光速の世界線は<u>任意の慣性系において慣性時刻表示をもつ</u>．

証明 (Ⅱ$\Rightarrow$Ⅰ)は当然．

(Ⅰ$\Rightarrow$Ⅱ)仮定により，$\exists(O,\boldsymbol{e})\in\boldsymbol{M}\times T^{\uparrow}_U$，$\exists\,C^\infty$ 級の写像 $X_{(O,e)}:\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{M}$

「(1) $X=\mathrm{Im}\,X_{(O,e)}$

(2) $\forall x\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$，　$X_{(O,e)}{}'(x)\in T^{\uparrow}$，

(3) $\forall x\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$，　$\langle\boldsymbol{e}\mid\overrightarrow{OX_{(O,e)}(x)}\rangle_M=-x$」

が成り立つ．

$\forall(P,\boldsymbol{f})$ を定めたとき，<u>写像 $\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}:\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})$</u> を

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(x)=-\langle\boldsymbol{f}\mid\overrightarrow{PX_{(O,e)}(x)}\rangle_M$$

で定義する．すなわち

$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(x)=y(x)$

$\Leftrightarrow$ $X_{(O,e)}(x)=P+y(x)\boldsymbol{f}+\boldsymbol{y}^S(x)$，$\boldsymbol{y}^S(x)\in\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})$

である．

<u>写像 $\iota_X=\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}:\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})$ は</u>

(i) <u>C^∞ 級，特に連続</u>である．

（ii）　真に増加する．もっと詳しく $\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}'(x)>0$ が成り立つ．

（iii）　全射である．

この事実の証明はつぎの補題（2.3.6）で行うことにして，しばらくこれを仮定する．当然 $\iota_X=\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}$ の逆写像 $\iota_X{}^{-1}$ が存在してやはり（i）～(iii) を満たす．

$X_{(P,f)}:=X_{(O,e)}\circ\iota_X{}^{-1}$ と置く．このとき

「(1)　$\mathrm{Im}\,X_{(P,f)}=X_{(O,e)}(\iota_X{}^{-1}(\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})))$

$=X_{(O,e)}(\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}))=X$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\iota_X'(x)>0$ なることに注意する．

$$\forall y\in\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f}),\quad \exists x\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}),\quad y=y(x)$$

$$X_{(P,f)}'(y)=X_{(O,e)}'(\iota_X{}^{-1}(y))x'(y)$$

$$=X_{(O,e)}'(x)\frac{dx}{dy}\in T^{\uparrow}$$

(3)　$\forall y\in\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{R},\quad \exists x\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{R},$

$$X_{(P,f)}(y)=X_{(O,e)}(x)\in P+y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f})$$

$$\therefore\quad \langle\boldsymbol{f}\mid PX_{(P,f)}(y)\rangle_M=-y$$」　　（定理の証明終）

補題（2.3.5）　C^1 級の関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ に対し，$\exists\alpha>0$

$$\forall x\in\boldsymbol{R},\qquad f'(x)>\alpha$$

ならば f は全単射である．

証明　$f'(x)>\alpha>0$ だから，f は $\boldsymbol{R}$ において増加する．したがってまた単射である．$f'(x)-\alpha>0$ だから，$a<b$ ならば

$$f(b)-f(a)-\alpha(b-a)=\int_a^b f'(t)-\alpha\ dt>0$$

$$\therefore\quad f(b)-f(a)>\alpha(b-a)$$

が成り立つことに注意する．

（i）　$x>0$ のとき，　$f(x)-f(0)>\alpha(x-0)=\alpha x$

$x\to\infty$ のとき，　$f(x)\to\infty$　…①

（ii）　$x<0$ のとき，　$f(0)-f(x)>(0-\alpha)x=-\alpha x$

$f(x)-f(0)<\alpha x$

$0>x\to-\infty$ のとき，　$f(x)<\alpha x+f(0)\to-\infty$　…②

①と②より，$\mathrm{Im}\, f=\boldsymbol{R}$　（証明終）

補題（2.3.6）　写像

$\iota_X=\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}：\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})$，$x\mapsto y(x)$ は

（i）　C^∞ 級，特に連続である

（ii）　真に増加する．特に単射である．

（iii）　全射である．

証明　（i）　写像 $x\mapsto X_{(O,e)}(X)$ が C^∞ 級だから

$$\iota_X(x)=-\langle \boldsymbol{f}\mid\overrightarrow{PX_{(O,e)}(x)}\rangle_M$$

も C^∞ 級である．

（ii）（iii）　$1\leqq-\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M$ であることに注意する（1.4.6）．

$$\alpha:=-\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M{}^2}}\right)>0$$

$$\exists x\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}),\qquad \iota_X'(x)>\alpha$$

なることを示せば，（ii）と（iii）の両者の証明が終わる（2.3.5）．

$$X_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$

$$X_{(P,f)}(y)=P+y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{y}_{(P,f)}(y)$$

とする．$X_{(O,e)}(x)=X_{(P,f)}(y)$ すなわち

$$y=\iota_X(x)=-\langle\boldsymbol{f}\mid\overrightarrow{PX_{(O,e)}(x)}\rangle_M$$

とする．$\iota_X(x)$ を微分して

$$\iota_X'(x)=-\langle\boldsymbol{f}\mid X_{(O,e)}'(x)\rangle_M \qquad\cdots①$$

である．ここで

$$\boldsymbol{f}=-\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+(\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})$$

と

$$X_{(O,e)}'(x)=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)$$

を①に代入すると，

$$①=-\langle-\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+(\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})\mid\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\rangle_M \qquad\cdots②$$

ここで

$$\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}\perp\boldsymbol{e}\qquad と\qquad \boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\perp\boldsymbol{e}$$

に注意すると，

$$②=-\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M-\langle\langle\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}\mid\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\rangle_S \qquad\cdots③$$

$V^S(\boldsymbol{e})$ における Shwarz の不等式により，

$$③\geqq -\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M - \|\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M \boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}\|_S \cdot \|\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\|_S \qquad \cdots ④$$

ここで

$$\|\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M \boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}\|_S{}^2 = \langle\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M \boldsymbol{e}+\boldsymbol{f} \mid \langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M \boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}\rangle_S$$
$$= -\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M{}^2 + 2\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M{}^2 - 1$$
$$= \langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M{}^2 - 1$$

かつ

$$\|\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\|_S < 1$$

だから，

$$④\geqq -\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M - \sqrt{\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M{}^2 - 1}$$
$$= -\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M - |\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M| \sqrt{1-\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M{}^{-2}} = \alpha$$
$$\therefore \quad \iota_X'(x) > \alpha$$

(証明終)

系 (2.3.7)　(i)　$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)} = X_{(P,f)}{}^{-1} \circ X_{(O,e)}$ である．

(ii)　$X_{(O,e)}(0_x) = X_{(P,f)}(0_y)$ ならば，

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(0_x) = 0_y$$

証明　(ii)　$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(0_x) = (X_{(P,f)}{}^{-1} \circ X_{(O,e)})(0_x)$

$$= X_{(P,f)}{}^{-1}(X_{(P,f)}(0_y)) = 0_y$$

である．　(証明終)

記号と補題 (2.3.8)　劣光速世界線 X，$\forall(O, \boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{M} \times T^{\downarrow}_U$ に対し，その慣性時刻表示

$$X_{(O,e)}(x) = O + x\boldsymbol{e} + x_{(O,e)}(x)$$

を用いて，

$$\Xi_{(O,e)}(x) := \int_0^x \|X_{(O,e)}'(z)\|_T dz$$

$$\gamma_{(O,e)}(x) := \frac{1}{\Xi_{(O,e)}'(x)} = \frac{1}{\|X_{(O,e)}'(x)\|_T}$$

と置く．

(i)　関数 $\Xi_{(O,e)} : \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{R}$ は増加したがって単射であり，その像 $I_{(O,e)} := \Xi_{(O,e)}(\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})) \subseteqq \boldsymbol{R}$ は開区間であって，0を含む．

（ii） $\gamma_{(O,e)}(x) \geqq 1$

証明 （i） $\Xi_{(O,e)}'(x) = \|X_{(O,e)}'(x)\|_T > 0$

だから，関数 $\Xi_{(O,e)}(x)$ は増加する．$0 = \Xi_{(O,e)}(0) \in I_{(O,e)}$ であって，$I_{(O,e)}$ が開区間であることは明らかである．

（ii） $$X_{(O,e)}(x) = O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$

とする．

$$X_{(O,e)}'(x) = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x) \in T^{\uparrow}$$

$$0 > \langle X_{(O,e)}'(x) \mid X_{(O,e)}'(x) \rangle_M = -1 + \|\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\|_S^2$$

$$\|\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\|_S < 1$$

$$\therefore \quad \|X_{(O,e)}'(x)\|_T^2 = -\langle X_{(O,e)}'(x) \mid X_{(O,e)}'(x) \rangle_M$$

$$= 1 - \|\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\|_S^2 < 1$$ （証明終）

補題（2.3.9） $\forall$ 劣光速世界線 X，$\forall (O, \boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{M} \times T^{\uparrow}_U$，

（i） $\forall Q := X_{(O,e)}(q) \in X$ に対し，

$$\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) + q\boldsymbol{e} = \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{e}), \qquad O + x\boldsymbol{e} \leftrightarrow Q + (x+q)\boldsymbol{e}$$

すなわち写像

$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(Q,e)} = X_{(Q,e)}{}^{-1} \circ X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{e})$ は

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(Q,e)}(x) = x + q$$

であって

$$X_{(O,e)}(x) = X_{(Q,e)}(x+q)$$

（ii） $$\Xi_{(Q,e)}(x) = \int_0^x \|X_{(O,e)}'(z+q)\|_T dz$$

$$= \Xi_{(O,e)}(x+q) - \Xi_{(O,e)}(q)$$

が成り立つ．

証明 $$X_{(O,e)}(x) = O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$

とする．

（i） $$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OX_{(O,e)}(q)} = q\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(q)$$

に注意する．

$$X_{(Q,e)}(x) := X_{(O,e)}(x+q) \qquad \cdots ①$$

$$= O + (x+q)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x+q)$$

$$= (O + q\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(q)) + x\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x+q) - \boldsymbol{x}_{(O,e)}(q))$$

$$=Q+x\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x+q)-\boldsymbol{x}_{(O,e)}(q)) \quad \cdots②$$

と置けば，この $X_{(Q,e)}(x)$ は確かに求めるものである．実際，

「(1)　$X=\mathrm{Im}\, X_{(Q,e)}$　(①による)

(2)　$X_{(Q,e)}'(x)=X_{(O,e)}'(x+q)\in T^{\uparrow}$　(①による)

(3)　等式②より，

$$\forall x\in \boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e}), \qquad \langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{QX_{(Q,e)}(x)}\rangle_M=-x」$$

が成り立つ．

(ii)
$$X_{(Q,e)}(x)=X_{(O,e)}(x+q)$$

$$\begin{aligned}
\Xi_{(Q,e)}(x)&=\int_0^x \|X_{(Q,e)}'(z)\|_T dz\\
&=\int_0^x \|X_{(O,e)}'(z+q)\|_T dz\\
&=\int_q^{x+q} \|X_{(O,e)}'(y)\|_T dy \quad (y=z+q)\\
&=\int_0^{x+q} \|X_{(O,e)}'(y)\|_T dy-\int_0^{q} \|X_{(O,e)}'(y)\|_T dy\\
&=\Xi_{(O,e)}(x+q)-\Xi_{(O,e)}(q)
\end{aligned}$$

が成り立つ．　　　　(証明終)

定理 (2.3.10)　特に $Q=X_{(O,e)}(0)=O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(0)\in X$ の場合には

$$\boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{E}^{T}_{Q}(\boldsymbol{e}), \qquad O+x\boldsymbol{e}\leftrightarrow Q+x\boldsymbol{e}$$

と同一視されて，すなわち写像

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(Q,e)}=X_{(Q,e)}{}^{-1}\circ X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e})\to \boldsymbol{E}^{T}_{Q}(\boldsymbol{e})$$

は恒等写像であって，

$$X_{(Q,e)}(x)=X_{(O,e)}(x)$$
$$\therefore \quad \Xi_{(Q,e)}(x)=\Xi_{(O,e)}(x)$$

したがってまた

$$I_{(Q,e)}=I_{(O,e)}, \qquad \gamma_{(Q,e)}(x)=\gamma_{(O,e)}(x)$$

が成り立つ．

なお $x=0$ のとき，等式 $X_{(Q,e)}(x)=X_{(O,e)}(x)$ は

$$X_{(Q,e)}(0)=Q=O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(0)=X_{(O,e)}(0)$$

を意味する．

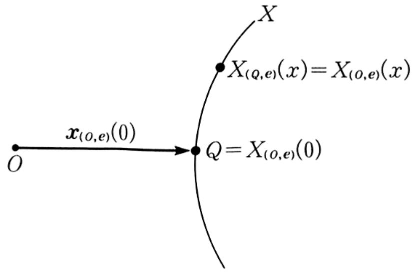


図 2.2

証明　$Q=X_{(O,e)}(0)=O+x_{(O,e)}(0)\in X$ の場合には，(2.3.9) で $q=0$ と置け．そのとき

$$X_{(Q,e)}(x)=X_{(O,e)}(x)$$
$$\Xi_{(Q,e)}(x)=\Xi_{(O,e)}(x)$$

であって，

$$\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{E}_Q^T(\boldsymbol{e}),\qquad O+x\boldsymbol{e}\leftrightarrow Q+x\boldsymbol{e}$$

と同一視できる．　　(証明終)

§2.4　固有時刻 ξ_P，X_P

$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ を Minkowski 空間とする．

補題 (2.4.1)　開区間 $0\in J$，$K\subseteq \boldsymbol{R}$ を定義域とする C^∞ 級の写像 Y：$J\to\boldsymbol{M}$ と Z：$K\to\boldsymbol{M}$ が

(i)　条件

「(1)　$\mathrm{Im}\,Y=\mathrm{Im}\,Z$

(2)　$\forall\eta\in J$,　$Y'(\eta)\in T_U^{\uparrow}$,　$\forall\xi\in K$,　$Z'(\xi)\in T_U^{\uparrow}$

特に $\|Z'(\xi)\|_T=\|Y'(\eta)\|_T=1$」

を満たすならば，合成写像

$$\pi=Y^{-1}\circ Z：K\to J$$

が考えられて，

$$\forall\xi\in K,\qquad \pi'(\xi)=1$$

が成り立つ．特に $\exists\alpha\in\boldsymbol{R}$

$$K+\alpha=J,\quad \forall\xi\in K,\quad Z(\xi)=Y(\xi+\alpha)$$

が成り立つ．さらに

（ii）条件

(3)　$Y(0_\eta)=Z(0_\xi)$

をも満たすならば

$$K=J,\qquad Z=Y\quad(\text{写像として等しい})$$

が成り立つ．

証明　（i）条件(2)より写像 $Y : J\to X :=\mathrm{Im}\ Y$ が全単射であるから（2.3.2），合成写像

$$\pi=Y^{-1}\circ Z : K\to J$$

が考えられる．すなわち

$$Z=Y\circ\pi$$

$$\pi(\xi)=\eta\quad のとき\quad Z(\xi)=Y(\eta)$$

が成り立つ．両辺を ξ について，微分すると，

$$Z'(\xi)=Y'(\pi(\xi))\pi'(\xi)$$

であるから，$\xi_1<\xi_2$ ならば $Y(\xi_1)<Y(\xi_2)$，$Z(\xi_1)<Z(\xi_2)$ であるから（2.3.2），$\pi(\xi_1)==Y^{-1}\circ Z(\xi_1)<\pi(\xi_2)$.

$$\pi'(\xi)>0,\qquad \|Z'(\xi)\|_T=\|Y'(\eta)\|_T|\pi'(\xi)|$$

である．一方 $\|Z'(\xi)\|_T=\|Y'(\eta)\|_T=1$ であるから，

$$\pi'(\xi)=1,$$

$$\therefore\quad \exists\,\alpha\in\boldsymbol{R},\qquad \pi(\xi)=\xi+\alpha \qquad \cdots①$$

が成り立つ．

一方 $Z(\xi)=Y(\pi_X(\xi))=Y(\xi+\alpha)$ に $\xi=0\in K$ を代入して，

$$Z(0_\xi)=Y(\alpha) \qquad \cdots②$$

（ii）さらに条件「(3)　$Y(0_\eta)=Z(0_\xi)$」が成り立つならば，②と併せて

$$Y(0_\eta)=Y(\alpha)$$

である．写像 Y が単射であるから $0_\eta=\alpha$

$$\therefore\quad \alpha=0,\quad \pi(\xi)=\xi+\alpha=\xi,\quad \pi=\mathrm{id},\quad K=J$$

$$Z=Z\circ\pi=Y\quad(\text{写像として等しい})$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

命題（2.4.2）　集合 $X \subseteqq \boldsymbol{M}$ について

（i）　X が劣光速世界線　$\Leftrightarrow \forall P \in X$,

$\exists_1$ 開区間 $0 \in I_P \subseteqq \boldsymbol{R}$,　　$\exists_1 C^\infty$ 級の写像 $X_P : I_P \to \boldsymbol{M}$,

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_P$

(2)　$\forall \xi \in I_P$,　$X_P'(\xi) \in T^{\uparrow}_U$

特に $\langle X_P'(\xi) \mid X_P'(\xi) \rangle_M = -1$

(3)　$X_P(0_\xi) = P$

(4)　$\forall \boldsymbol{e} \in T^{\uparrow}_U$,　$\langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{PX_P(I_P)} \rangle_M = \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{e})$

すなわち

$\forall G \in \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{e})$,　$\exists \xi \in I_P$,　$\exists \boldsymbol{x}^S \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$,

$$X_P(\xi) = P + G\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S」$$

が成り立つ．

（ii）　$\forall \boldsymbol{e} \in T^{\uparrow}_U$,　$X_P = X_{(P,e)} \circ \varXi_{(P,e)}{}^{-1}$

$$\varXi_{(P,e)} = X_P{}^{-1} \circ X_{(P,e)}$$

$$I_P = \varXi_{(P,e)}(\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{e}))$$

が成り立つ．

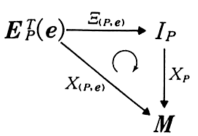
（iii）　別の慣性系 $(Q, \boldsymbol{f}) \in X \times T^{\uparrow}_U$ についての開区間 $I_Q \subseteqq \boldsymbol{R}$，写像 $X_Q : I_Q \to \boldsymbol{M}$ と $\varXi_{(Q,f)} : \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{f}) \to I_Q$ に対し，写像

$$\pi_X{}^P{}_Q := X_Q{}^{-1} \circ X_P : I_P \to I_Q$$

$$\iota_X{}^{(P,e)}{}_{(Q,f)} := X_{(Q,f)}{}^{-1} \circ X_{(P,e)} : \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{f})$$

$$\varXi_{(P,e)} = X_P{}^{-1} \circ X_{(P,e)} : \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{R}$$

$$\varXi_{(Q,f)} = X_Q{}^{-1} \circ X_{(Q,f)} : \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{f}) \to \boldsymbol{R}$$



を考えると，

(イ)　$$\pi_X{}^P{}_Q \circ \varXi_{(P,e)} = \varXi_{(Q,f)} \circ \iota_X{}^{(P,e)}{}_{(Q,f)}$$

が成り立ち，

(ロ)　$$\pi_X{}^P{}_Q{}'(\xi) = 1$$

$$\exists\,\alpha\in \boldsymbol{E}^{T}_{Q}(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{R},\quad \forall\,\xi\in\boldsymbol{R},\quad \pi_{X}{}^{P}{}_{Q}(\xi)=\xi+\alpha$$
$$I_Q=I_P+\alpha=\{\xi+\alpha\mid\xi\in I_P\}$$

が成り立つ．

証明　(i)「(⇒) <u>I_P と X_P の一意性</u>」と (ii)：条件(1)(2)(3)を満たす開区間 I_P と写像 X_P は (2.4.1) により一意的である．

<u>I_P と X_P の存在</u>：条件(1)(2)(3)を満たす開区間 I_P と写像 X_P がとにかく存在することを示せば証明は完了する．

$\forall\,\boldsymbol{e}\in T^{\uparrow}_{U}$ を定め，$(P,\boldsymbol{e})$ における慣性時刻表示 $X_{(P,\boldsymbol{e})}(x)$ を用いて，

$$\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}(x):=\int_0^x\|X_{(P,\boldsymbol{e})}{}'(z)\|_T dz$$

と置く．関数

$$\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}:\boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{e})\to I_P:=\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}(\boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{e}))\subseteqq\boldsymbol{R},$$
$$x\mapsto\xi=\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}(x)$$

は真に増加する．ゆえに逆写像

$$\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}{}^{-1}:I_P\to\boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{e}),\qquad \xi\mapsto x$$

が存在し，これは全射である．このとき，写像

$$X_P=X_{(P,\boldsymbol{e})}\circ\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}{}^{-1}:I_P=\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}(\boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{e}))\to X,$$

が求めるものである．実際

(1)　$\mathrm{Im}\,X_P=X_P(I_P)$
$$=X_{(P,\boldsymbol{e})}(\boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{e}))=\mathrm{Im}\,X_{(P,\boldsymbol{e})}=X$$

(2)　$\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}(x)=\xi\in I_P$ において

$$X_P(\xi)=X_{(P,\boldsymbol{e})}{}'(x)\frac{dx}{d\xi}$$
$$=\frac{X_{(P,\boldsymbol{e})}{}'(x)}{\|X_{(P,\boldsymbol{e})}{}'(x)\|_T}\in T^{\uparrow}_{U}$$

(3)　$\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}(0_x)=0_\xi$ だから，$X_P(0_\xi)=X_{(P,\boldsymbol{e})}(0_x)=P$ が成り立つ (2.3.2) の (ii)．

(4)　$\langle\boldsymbol{e}\mid\overrightarrow{PX_P(I_P)}\rangle_M=\{x\mid\xi\in I_P,\ x=x(\xi)\}$
$$=\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}{}^{-1}(I_P)$$
$$=(\text{関数 }\Xi_{(P,\boldsymbol{e})}:x\mapsto\xi\text{ の定義域})=\boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{e})$$

が成り立つ．したがって開区間 $I_P\subseteqq\boldsymbol{R}$ と写像 $X_P:I_P\to\boldsymbol{R}$ とは補題 (2.4.1)

の条件(1)(2)(3)を満たす．

$$\therefore \quad I_P, \quad X_P$$

は求めるものである．

（i）(⇐) C^∞ 級の写像 $X_P : I_P \to \boldsymbol{M}$

$$X_P(\xi) = P + x(\xi)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(P,e)}(\xi)$$

が

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_P$

(2)　$\forall \xi \in I_P, \quad X_P'(\xi) \in T_U^{\downarrow}$

(3)　$X_P(0_\xi) = P$

(4)　$\forall \boldsymbol{e} \in T_U^{\downarrow}, \quad \langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{PX_P(I_P)} \rangle_M = \boldsymbol{R}$」

を満たすとする．このとき，関数 $x(\xi)$ も C^∞ 級であって，

$$X_P'(\xi) = x'(\xi)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(P,e)}'(\xi) \sim \boldsymbol{e}$$

より，

$$\frac{dx}{d\xi} = x'(\xi) > 0$$

よって $I_P \to \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{e})$，$\xi \mapsto x(\xi)$ は ξ の増加関数，したがって逆関数

$$\Xi : x(I_P) \to I_P, \qquad x \mapsto \xi$$

が存在して，増加かつ C^∞ 級である．すなわち

$$\xi = \Xi(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x(\xi) = \Xi^{-1}(\xi)$$

$$\Xi'(x) > 0$$

が成り立つ．条件(4)より

$$\begin{aligned}(\text{関数 } \Xi : x \mapsto \xi \text{ の定義域}) &= \{x \mid x = x(\xi),\ \xi \in I_P\} \\ &= \{x(\xi) \mid X_P(\xi) = O + x(\xi)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(P,e)}(\xi)\} \\ &= \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{e})\end{aligned}$$

である．そこで $\forall x \in \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{e})$ に対し，$\xi = \Xi(x) \in I_P$ と置けば，

$$x = \Xi^{-1}(\xi) = x(\xi)$$

$$Y_{(O,e)}(x) := X_P(\Xi(x)) = O + x(\xi)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S(x(\xi))$$

と置けば，これは X の慣性時刻表示にほかならない．実際

$$Y_{(O,e)}(x) = X_P(\Xi(x))$$

は $x \in \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{e})$ について C^∞ 級であって，

(1)　$\mathrm{Im}\ Y_{(O,e)}=X$

(2)　$Y_{(O,e)}'(x)=\overrightarrow{X_P'(\Xi(x))\Xi'(x)}\in T^{\uparrow}$

(3)　$\forall x\in \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{e}),\qquad \langle \boldsymbol{e}\mid \overrightarrow{PY_{(O,e)}(x)}\rangle_M=-x$

$$x=x(\xi)$$

が成り立つ．

(iii)　(イ)　合成写像を考えることにより

$$\begin{aligned}\pi_{X}{}^{P}{}_{Q}\circ \Xi_{(P,e)}&=(X_Q{}^{-1}\circ X_P)\circ(X^{-1}\circ X_{(P,e)})\\&=(X^{-1}\circ X_{(P,e)})\\&=(X_Q{}^{-1}\circ X_{(Q,f)})\circ(X_{(Q,f)}{}^{-1}\circ X_{(P,e)})\\&=\Xi_{(Q,f)}\circ \iota_X{}^{(P,e)}{}_{(Q,f)}\end{aligned}$$

である．

(ロ)　$\forall \xi\in I_P$，$\eta:=\pi_X{}^P{}_Q(\xi)=X_Q{}^{-1}\circ X_P(\xi)$ と置く．このとき，写像 X_P：$I_P\to \boldsymbol{M}$ と X_Q：$I_Q\to \boldsymbol{M}$ とは共に条件(1)(2)を満たすから (2.4.1) により，

$$\therefore\quad \pi_X{}^P{}_Q'(\xi)=\frac{d\eta}{d\xi}=1$$

$$\therefore\quad \exists\, \alpha\in \boldsymbol{R},\qquad \forall \xi\in \boldsymbol{R},\qquad \eta=\pi_X{}^P{}_Q(\xi)=\xi+\alpha$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

定義 (2.4.3)　径数 $\xi_P=\xi\in \boldsymbol{R}$ は $P\in X$ のみに依存する．$\xi_P=\xi\in I_P\subseteqq \boldsymbol{R}$ を位置 P を基準点とする劣光速世界線 X の**固有時刻**，または曲線 X の**標準径数**という．写像

$$X_P：I_P\to X$$

を位置 P を基準点とする X の**固有時刻表示**という．劣光速世界線は任意の位置 $P\in X$ を基準点とする固有時刻表示 X をもつ．

注意　(i)　劣光速世界線 $X=\mathrm{Im}\ X_{(O,e)}=\mathrm{Im}\ X_P$ を

世界線 $X_{(O,e)}$，　世界線 $X_{(O,e)}(t)=O+t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(t)$

世界線 X_P，　世界線 $X_P(\xi)$

などと言い表すことも多い．大雑把にいえば劣光速世界線とは向きを考えた曲線のことであって，運動学とは Minkowski 空間における曲線論にほかならない．

(ii)　写像 $dX_P：X\to \boldsymbol{V}^{(n,1)}$，$X_P(\xi)\mapsto X_P'(\xi)$ は世界線 X 上の反変ベクト

ル場である．

(iii)　一般には固有時刻表示 $X_P : I_P \to X$ の定義域 $I_P \subseteqq \boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}$ 全体とはならない（練習問題 1. 参照）．$I_P = \boldsymbol{R}$ となる劣光速世界線を**固有な世界線**という．以下，<u>簡単のために固有な世界線のみを考える</u>．

∀ 劣光速世界線 $X = \mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$ について，$O \in X$ ならば

$$X_{(O,e)}(0) = O$$

であった（(2.3.3) の (iii)）．

系（2.4.4）　∀ 劣光速世界線 X，$\forall Q, P \in X$ と $\forall \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in T^{\downarrow}_{U}$ について，Q, P を基準点とする固有時刻 ξ_Q, ξ_P 及び慣性時刻 $z \in \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{g})$，$y \in \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f})$ の間には，それぞれ全単射

（i）　$\pi_X{}^Q{}_P = X_P{}^{-1} \circ X_Q : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$\xi_Q \mapsto \xi_P$　（2.4.2）

$$\iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)} = X_{(P,f)}{}^{-1} \circ X_{(Q,g)} : \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{g}) \to \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f}),\quad z \mapsto y$$

$$\Xi_{(Q,g)} = X_Q{}^{-1} \circ X_{(Q,g)} : \boldsymbol{E}^T_Q(\boldsymbol{g}) \to \boldsymbol{R},\quad z \mapsto \xi_Q \qquad (2.4.2)$$

$$\Xi_{(P,f)} = X_P{}^{-1} \circ X_{(P,f)} : \boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f}) \to \boldsymbol{R},\quad y \mapsto \xi_P \qquad (2.4.2)$$

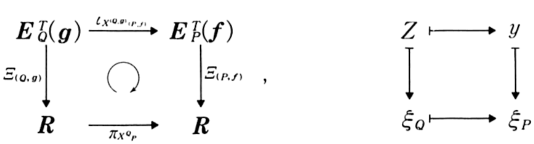
が定まる．

（ii）　$\pi_X{}^P{}_Q{}^{-1} = \pi_X{}^Q{}_P$，　$\iota_X{}^{(P,f)}{}_{(Q,e)}{}^{-1} = \iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)}$

$$\pi_X{}^Q{}_P \circ \Xi_{(O,g)} = \Xi_{(P,f)} \circ \iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)}$$

$$\iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)} = \Xi_{(P,f)}{}^{-1} \circ \pi_X{}^Q{}_P \circ \Xi_{(Q,g)}$$

が成り立つ．



(iii)　$\Xi_{(Q,e)}(0_z) = 0_\xi$，　$\Xi_{(P,f)}(0_y) = 0_\xi$

$$X_Q(0_\xi) = X_{(Q,e)}(0_z) = Q$$

$$X_P(0_\xi) = X_{(P,f)}(0_y) = P$$

$Q = P \in X$ のとき $\pi_X{}^Q{}_P(0_\xi) = 0_\xi$，　$\iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)}(0_z) = 0_y$ が成り立つ．

証明　（i）　すでに述べた（2.4.2）．

$$X_P(\pi_X{}^Q{}_P(\xi_Q)) = X_Q(\xi_Q)$$

$$X_{(P,f)}(\iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)}(z))=X_{(Q,g)}(z)$$
$$X_Q(\Xi_{(Q,g)}(z))=X_{(Q,g)}(z)$$
$$X_P(\Xi_{(P,f)}(y))=X_{(P,f)}(y)$$

(ii)　すでに述べた (2.4.2).

(iii)　等式

$$\pi_X{}^Q{}_P\circ\Xi_{(Q,g)}=\Xi_{(P,f)}\circ\iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)}$$

を 0_z に作用させると，

$$0_\xi=\Xi_{(P,f)}\circ\iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)}(0_z)$$
$$\iota_X{}^{(Q,g)}{}_{(P,f)}(0_z)=0_y$$

(証明終)

注意　$\pi_X{}^Q{}_P$ の π は proper time（固有時刻）の p を意味する.

系 (2.4.5)　$(\boldsymbol{M},\boldsymbol{V}_M)$ を Minkowski 空間，X を世界線，$\forall Q\in X$ と $\forall\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in T_U^{\downarrow}$ 及び $\forall O,P\in\boldsymbol{M}$ について，Q を基準点とする固有時刻 ξ_Q 及び慣性時刻 $z\in\boldsymbol{E}_Q^T(\boldsymbol{g})$，$y\in\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})$，$x\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})$ を考える．写像

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}=X_{(P,f)}{}^{-1}\circ X_{(O,e)}:\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})$$

を考える.

(i)　$Q\in X\cap(O+V^S(\boldsymbol{e}))$ のとき，　$Q=X_{(O,e)}(0)$ であって，　写像 $X_Q^{-1}\circ X_{(O,e)}:\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{R}$，$x\mapsto\xi_Q$ は，$\Xi_{(Q,e)}$ に等しい.

$$\Xi_{(Q,e)}=X_Q^{-1}\circ X_{(O,e)}$$

(ii)
$$\iota_X{}^{(P,f)}{}_{(O,e)}{}^{-1}=\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}$$

が成り立つ.

証明　(i)　$X_Q(\Xi_{(Q,e)}(x))=X_{(Q,e)}(x)=X_{(O,e)}(x)$

(ii)　すでに述べた (2.4.2).　　　(証明終)

注意　(i)　$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}$ の ι は inertial time（慣性時刻）の i を意味する.

(ii)　写像 $\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}=X_{(P,f)}{}^{-1}\circ X_{(O,e)}:\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{f})$ は X に依存する. §2.5 の練習問題 2 を参照.

定義 (2.4.6)　慣性系や基準点を特定しないで，単に X の固有時刻といえば，条件

$$\exists\ \text{慣性系}\,(P,\boldsymbol{e})\in X\times T_U^{\downarrow},\quad d\xi/dx=\|X_{(P,e)}{}'(x)\|_T$$

のみを満たす径数 ξ を意味する．この意味の固有時刻は基準点 $P\in X$ に関係なく加法定数を除いて一意に定まる (2.4.2) の (ii).

注意　4次元のMinkowski空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ において質点 (X, m) の世界線 X は劣光速の世界線である（特殊相対性原理 (4. 2. 2) の (iii) 参照）.

§2.4 の練習問題

問題 1.　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ において，Minkowski 枠 $(O\,;\,\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を定め，

$$X := \left\{O + \left(\xi - \frac{1}{\xi^2}\right)\boldsymbol{e} + \xi\boldsymbol{e}_1 \;\middle|\; 0 < \xi \in \boldsymbol{R}\right\}$$

と置く.

（i）　X は劣光速世界線である.

（ii）　$\Xi_{(O,e)}(x) := \int_0^t \|X_{(O,e)}{}'(x)\|_T dx$

$I_0 = \Xi_{(O,e)}(\boldsymbol{R}) \subset \neq \boldsymbol{R}$

すなわち X は固有な世界線ではない.

答

1.　（i）　$x = f(\xi) := \xi - \dfrac{1}{\xi^2}$ とおけば，$f : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は真に増加し，全単射である.

f が単射なること：$f'(\xi) = 1 + \dfrac{2}{\xi^3} > 1$ だから，f は真に増加する．特に単射である.

f が全射なること：$\xi \to \infty$ のとき，$f(\xi) \to \infty$

$\xi \to 0+0$ のとき，$f(\xi) \to -\infty$

f が全単射であるから，f の逆関数 $\xi = \Xi(x)$ がある.

$$f^{-1} = \Xi : \boldsymbol{R} \to (0, \infty), \qquad x \mapsto \xi$$

そこで，$X_{(O,e)}(x) := O + x\boldsymbol{e} + \Xi(x)\boldsymbol{e}_1 \in Map(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M})$ と置けば

$$X_{(O,e)}(x) = O + f(\xi)\boldsymbol{e} + \xi\boldsymbol{e}_1$$

だから，

(1)　$$\mathrm{Im}\, X_{((O,e)} = X$$

（ii）　$X_{(O,e)}{}'(x) = \boldsymbol{e} + \Xi'(x)\boldsymbol{e}_1$

$\langle X_{(O,e)}{}'(x) \mid X_{(O,e)}{}'(x)\rangle_M$

$$= -1 + \Xi'(x)^2 = -1 + \frac{1}{f'(\xi)^2} < 0$$

(2)　$$\therefore\quad X_{(O,e)}{}'(x) \in T^{\,\prime}$$

(3)　　$\forall x \in \boldsymbol{R},\ \langle \boldsymbol{e} \mid OX_{(O,e)}(x)\rangle_M = -x$

よって X は劣光速世界線の条件を満たす．

$$\|X_{(O,e)}'(x)\|_T{}^2 = -\langle X_{(O,e)}'(x) \mid X_{(O,e)}'(x)\rangle_M$$
$$= 1 - \Xi'(x)^2 = 1 - \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2$$

だから，

$$\Xi_{(O,e)}(x) = \int_O^X \|X_{(O,e)}'(x)\|_T dx$$
$$= \int_{t=0}^{\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_{x=1}^{\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2}\, \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{x=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 - 1}\, d\xi$$
$$= \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{4}{\xi^3} + \frac{4}{\xi^6}}\, d\xi = 2\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^3+1}}{\xi^3} d\xi$$

ところで，

$$\frac{\dfrac{\sqrt{\xi^3+1}}{\xi^3}}{\dfrac{1}{\sqrt{\xi^3}}} = \sqrt{\frac{\xi^3+1}{\xi^3}} \to 1 \quad (\xi \to \infty)$$

かつ

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} d\xi = \int_1^{\infty} \frac{1}{\xi^{3/2}} d\xi < \infty$$

であるから，$Sup\, \Xi_{(O,e)}(x) < \infty$

$$I_O = \Xi_{(O,e)}(\boldsymbol{R}) \subset \boldsymbol{R}$$

§ 2.5　$D^m X(Q)$，時空速度 $\boldsymbol{V}_{(O,e)}(x)$

Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において

(ｉ)　集合 $X \subseteq \boldsymbol{M}$ が劣光速世界線

$\Leftrightarrow \forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$，$\exists\, C^\infty$ 級の写像 $X_{(O,e)} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{M}$ 　　…①

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$

(2)　$\forall x \in \boldsymbol{R},\quad X_{(O,e)}'(x) \in T^{\uparrow}$

(3)　$\forall x \in \boldsymbol{R},\quad \langle \boldsymbol{e} \mid X_{(O,e)}(x)\rangle_M = -x$」

$\Leftrightarrow \forall$ 位置 $P \in X$，$\exists\, C^\infty$ 級の写像 $X_P : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{M}$ 　　…②

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_P$

(2)　$\forall \xi \in \boldsymbol{R}$,　$X_P(\xi) \in T_U^{\downarrow}$

(3)　$X_P(0_\xi) = O$

(4)　$\forall \boldsymbol{e} \in T_U^{\downarrow}$,　$\langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{PX_P(I_P)} \rangle_M = \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{e})$」

と定義した．写像 $X_{(O,e)}$ ①を $(O, \boldsymbol{e})$ における X の慣性時刻表示といい，写像 X_P ②を $P \in X$ を基準点とする世界線 X の固有時刻表示といった．

（ii）　劣光速世界線 X，$\forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$

$$\Xi_{(O,e)}(x) := \int_0^x \|X_{(O,e)}'(x)\|_T dx$$

と置いた．

(2.3.3) より $O \in X$ のとき $X_{(O,e)}(0) = O$．

定義と命題 (2.5.1)　劣光速世界線 $X = \mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$ について，

（i）　慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ において，

$$X_{(O,e)}(x) = O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$

のとき

$$\boldsymbol{v}_{(O,e)}(x) := \boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x) = \frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dx}(x) \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

を X の慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における**空間速度**という．**慣性速度**ともいう．

（ii）　$$\beta_{(O,e)}(x) := \|\boldsymbol{v}_{(O,e)}(x)\|_S < 1$$

と置く．

$$\gamma_{(O,e)}(x) = \frac{1}{\Xi_{(O,e)}'(x)} = \frac{1}{\|X_{(O,e)}'(x)\|_T}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(x)^2}} \geqq 1$$

である．特に

（iii）　$P \in X$ のときには，

$$\gamma_{(P,e)}(x) = \frac{dx}{d\xi_P}$$

証明　$X_P(\xi_P) = X_{(O,e)}(x) = O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$

とする．

$$X_P'(\xi_P) = X_{(O,e)}'(x) \frac{dx}{d\xi_P}$$

$$-1=-\|X_P(\xi_P)\|_T{}^2=\left(\frac{dx}{d\xi_P}\right)^2(-1+\beta_{(O,e)}(x)^2)$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{d\xi_P}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(x)^2}}=\gamma_{(O,e)}(x)$$ （証明終）

定義（2.5.2）　集合 S，Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，

（i）　写像の族

$$\{F_{(P,f)}\in Map(S,\ \boldsymbol{M})\mid (P,\ \boldsymbol{f})\in \boldsymbol{M}\times T_U^{\uparrow}\}$$

に対し，

$$\forall (O,\ \boldsymbol{e}),\quad (P,\ \boldsymbol{f}),\quad F_{(O,e)}=F_{(P,f)}$$

が成り立つとき，族 $\{F_{(P,f)}\}_{(P,f)}$ は S 上の**不変式**であるという．このとき $\exists/\forall(O,\ \boldsymbol{e})$，$F:=F_{(O,e)}$ と置けば，F は慣性系に関係しない集合 S 上の不変式である．

（ii）　写像の族

$$\{F_P\in Map(S,\ \boldsymbol{M})\mid P\in X\}$$

に対し，

$$\forall R,P\in X,\quad F_R=F_P$$

が成り立つとき，族 $\{F_P\}_P$ は S 上の**不変式**であるという．このとき $\exists/\forall P\in X$，$F:=F_P$ と置けば，F は基準点 P に関係しない集合 S 上の不変式である．

注意（2.5.3）　2つの写像 $f(x)$ と $g(y)$ の間に

$$\exists\,\alpha\in\boldsymbol{R},\qquad g(x+\alpha)=f(x)$$

なる関係があるとする．

$$\forall\,x_0\in\boldsymbol{R},\qquad g'(x_0+\alpha)=f'(x_0)$$

補題（2.5.4）　2つの写像 $F,G\in Map(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{M})$ または $F,G\in Map(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{V}_M)$ について

$$X_P(\xi_P)=X_R(\xi_R),\qquad F(\xi_P)=G(\xi_R)$$

ならば，$\forall\,m\geqq 1$，m 階の微分係数について

$$F^{(m)}(\xi_P)=G^{(m)}(\xi_R)\in\boldsymbol{V}_M$$

が成り立つ．

証明　$m=1$ のとき：$X_P(\xi_P)=X_R(\xi_R)$ とする．

$$\xi_P=X_P^{-1}\circ X_R(\xi_R)=\pi_X{}^R{}_P(\xi_R)$$

であるから，$\pi_X{}^R{}_P{}'(\xi_R)=1$ を用いて，

$$F'(\xi_P)=G'(\xi_R)\pi_X{}^R{}_P{}'(\xi_R)=G'(\xi_R)$$

を得る．また $F^{(m)}(\xi_P)=G^{(m)}(\xi_R)$ が成り立つならば，F，G の位置に $F^{(m)}(\xi_P)$，$G^{(m)}(\xi_R)$ を置けば，

$$F^{(m+1)}(\xi_P)=G^{(m+1)}(\xi_R)$$

を得る．　（証明終）

記号（2.5.5）　劣光速世界線 X，$\forall m\geqq 0$ に対し，写像の族

$$\left\{\frac{d^m X_P}{d\xi_P{}^m}\circ X_P^{-1}\ \middle|\ P\in X\right\}$$

は X 上の不変式である．すなわち位置 $R\in X$ および $P\in X$ を基準点とする固有時刻を ξ_R, ξ_P とするとき

$$X_P(\xi_P)=X_R(\xi_R)\quad \text{すなわち}\quad \xi_P=\pi_X{}^R{}_P(\xi_R)$$

ならば，

$$\frac{d^m X_P}{d\xi_P{}^m}(\xi_P)=\frac{d^m X_R}{d\xi_R{}^m}(\xi_R)$$

が成り立つ．すなわち $\forall Q\in X$ に対し

$$Q=X_P(\xi_P)$$

のとき

$$\frac{d^m X_P}{d\xi_P{}^m}(\xi_P)\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

は，基準点 $P\in X$ の取り方によらず，Q のみにより定まる．これを

$$D^m X(Q)$$

と表す．$D^0X(Q)=Q\in X\subset \boldsymbol{M}$ である．

$m\geqq 1$ のとき，$D^mX\in Map(X, \boldsymbol{V_M})$ は X 上の不変式である．

定義（2.5.6）　劣光速世界線 $X=\mathrm{Im}\, X_P$，$\forall Q=X_P(\xi_P)\in X$ に対し，

$$\boldsymbol{V}(Q):=DX(Q)=X_P{}'(\xi_P)\in T^{\downarrow}_U\subseteqq \boldsymbol{V_M}$$

を位置 Q における X の**時空速度**または**4 元速度**という．固有時刻 ξ_P における**時空速度**ともいう．

$$\boldsymbol{A}(Q)=D^2X(Q)=X_P{}''(\xi_P)\in \boldsymbol{V_M}$$

を位置 Q における X の**時空加速度**または**4元加速度**という．固有時刻 ξ_P における**時空加速度**ともいう．

定義と補題 (2.5.7)　劣光速世界線 $X=\mathrm{Im}\,X_{(O,e)}$，慣性時刻 $x\in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ に対し

$$\boldsymbol{V}_{(O,e)}(x):=\frac{X_{(O,e)}'(x)}{\|X_{(O,e)}'(x)\|_T}\in T^{\uparrow}_U$$

を慣性時刻 $x\in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ における X の**時空速度**という．

$Q=X_{(O,e)}(0)\in X$ と置けば，

(i)　$\boldsymbol{V}_{(O,e)}(x)=\boldsymbol{V}(\Xi_{(O,e)}(x))=\boldsymbol{V}(\Xi_{(Q,e)}(x))\in T^{\uparrow}_U$

(ii)　$\forall P=X_{(O,e)}(p)\in X$,

$$\boldsymbol{V}_{(O,e)}(p)=\boldsymbol{V}(P)$$

が成り立つ (2.2.8)．言い換えれば，写像の族

$$\{\boldsymbol{V}_{(O,e)}\circ X_{(O,e)}{}^{-1}\in Map(X,\ \boldsymbol{V}_M)\mid (O,\boldsymbol{e})\in \boldsymbol{M}\times T^{\uparrow}_U\}$$

は世界線 X 上の不変式である．

証明　(i)　$Q=X_{(O,e)}(0)\in X$ をとれば，慣性時刻 $x\in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ に対し

$$X_{(O,e)}(x)=X_{(Q,e)}(x)$$
$$\Xi_{(O,e)}(x)=\Xi_{(Q,e)}(x)$$

が成り立つ (2.3.8)．ゆえに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{(O,e)}(x)&=\frac{X_{(O,e)}'(x)}{\|X_{(O,e)}'(x)\|_T}\\&=\frac{X_{(Q,e)}'(x)}{\|X_{(Q,e)}'(x)\|_T}\\&=X_Q'(\Xi_{(Q,e)}(x))\\&=\boldsymbol{V}(\Xi_{(Q,e)}(x))\end{aligned}$$

(ii)　$\boldsymbol{V}_{(O,e)}(p)=\boldsymbol{V}(\Xi_{(Q,e)}(p))=\boldsymbol{V}(P)$　　(証明終)

命題 (2.5.8)　$\forall$ 劣光速世界線 X，$\forall$ 慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$，$(P,\boldsymbol{f})$ について，写像

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}=X_{(P,f)}{}^{-1}\circ X_{(O,e)}:\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}^T_P(\boldsymbol{f}),\quad x\mapsto y$$

の微分係数は

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}{}'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\|X_{(O,e)}'(x)\|_T}{\|X_{(P,f)}'(y)\|_T}=\frac{\Xi_{(O,e)}'(y)}{\Xi_{(P,f)}'(x)}$$

$$=\frac{\gamma_{(P,f)}(x)}{\gamma_{(O,e)}(y)}$$

証明

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(x)=y$$

と置けば，

$$X_{(O,e)}(x)=X_{(P,f)}(y)$$

である．両辺を x について微分すると，

$$X_{(O,e)}{}'(x)=X_{(P,f)}{}'(y)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\quad \|X_{(O,e)}{}'(x)\|_T=\|X_{(P,f)}{}'(y)\|_T\frac{dy}{dx}$$

$$\|X_{(O,e)}{}'(x)\|_T=\Xi_{(O,e)}{}'(x)=\frac{1}{\gamma_{(O,e)}(x)}$$

$$\|X_{(P,f)}{}'(y)\|_T=\Xi_{(P,f)}{}'(y)=\frac{1}{\gamma_{(P,f)}(y)}$$

だから，

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}{}'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\|X_{(O,e)}{}'(x)\|_T}{\|X_{(P,f)}{}'(y)\|_T}=\frac{\gamma_{(P,f)}(y)}{\gamma_{(O,e)}(x)}$$

である．　(証明終)

§2.6　定速度の劣光速世界線，静止系

(2.2.10) の (ⅰ) と同様に，つぎのことが成り立つ．

命題と定義 (2.6.1)　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V_M})$ の劣光速世界線 X について

(1)　∃／∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})\in X\times T_U^{\downarrow}$ における空間速度 $\boldsymbol{v}_{(O,e)}(x)$ が定値である．

⇔(2)　X はアフィン直線（1次元のアフィン部分空間）である．このとき，X は**定速度**であるという．

証明　(1)⇒(2)　∃ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})\in \boldsymbol{M}\times T_U^{\downarrow}$ における空間速度 $\boldsymbol{v}_{(O,e)}(x)$ が定値であるとすれば，当然 X は1次元のアフィン部分空間である．

$$\begin{aligned}X_{(O,e)}&=O+x\boldsymbol{e}+x\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\\&=O+\boldsymbol{w}+x(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

(2)⇒(1)　逆に X が M 上のアフィン直線ならば

$$\exists P\in M,\quad \exists \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V}$$
$$X=\{P+x\boldsymbol{a}\mid x\in \boldsymbol{R}\}$$
$$X'(t)=\boldsymbol{a}\in T^{\uparrow},\quad \therefore\quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{w}_0\quad (\boldsymbol{e}\in T^{\uparrow},\ \boldsymbol{w}_0\in S)$$

より $X_{(P,e)}(x)=P+x\boldsymbol{e}+x\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{v}_{(O,e)}(x)=\boldsymbol{w}_0$（定値）

（証明終）

命題（2.6.2）　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M)$ の劣光速世界線 X について，次の(1)～(3)は同値である．

(1)　X は定速度である，すなわちアフィン直線である．

(2)　∃／∀ 位置 $P\in X$ を基準点とする時空速度 $X_P'(\xi)$ が定値 $\boldsymbol{V}$ である．

(3)　時空速度 $X\to \boldsymbol{V}_M$, $R\mapsto \boldsymbol{V}(R)$ が定値ベクトルである．

証明　(2)⇒(1)　$X_P'(\xi)=\boldsymbol{V}$ とする．

$$X_P(\xi)-X_P(0)=\int_0^{\xi}X_P'(\xi)d\xi=\int_0^{\xi}\boldsymbol{V}d\xi=\xi\boldsymbol{V}$$
$$\therefore\quad X_P(\xi)=\xi\boldsymbol{V}+X_P(0)$$

よって X はアフィン直線．

(1)⇒(2)　X がアフィン直線とする．

$$X_P(\xi)=\xi\boldsymbol{V}+X_P(0)$$
$$\therefore\quad X_P'(\xi)=\boldsymbol{V}$$

(2)⇔(3)　$\forall P\in X$ を定めたとき，$R=X_P(\xi_P)$ に対し

$\boldsymbol{V}(R):=(DX)(R)=X_P'(\xi_P)=\boldsymbol{V}(\xi_P)$ であるから，

$$\boldsymbol{V}(R)\text{ が定値}\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{V}(\xi_P)\text{ が定値}$$

（証明終）

命題（2.6.3）　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M)$ の劣光速世界線 X について X は定速度，すなわち ∃／∀ 慣性系 $(P, \boldsymbol{e})\in X\times T_U^{\uparrow}$ における空間速度 $\boldsymbol{v}_{(O,e)}(x)$ が定値であれば，∀ 位置 $P\in X$ を基準点とする固有時刻 ξ と $(P, \boldsymbol{e})$ における慣性時刻とは定数倍を除いて一致する．

$$\exists \gamma, C\in \boldsymbol{R},\quad x=\gamma\xi_P+C,$$

もっと詳しく $(P, \boldsymbol{e})$ における X の空間速度を $\boldsymbol{v}_{(P,e)}$ とすれば

$$\frac{dx}{d\xi_P}=\frac{1}{\sqrt{1-\|\boldsymbol{v}_{(P,e)}\|_S}}=\gamma_{(P,e)}=\text{定数}\qquad\cdots①$$

$$x=\gamma_{(P,e)}\xi_P+C$$

が成り立つ．

証明　X が定速度とする．∀ 慣性系 $(P,\boldsymbol{e})\in X\times T^{\uparrow}_U$ において，空間速度 $\boldsymbol{v}_{(P,e)}(x)$ が定値とする．そのとき

$$\frac{dx}{d\xi_P}=\frac{1}{\sqrt{1-\|\boldsymbol{v}_{(P,e)}\|_S}}=\gamma_{(P,e)}=\text{定数}$$

であるから，∃ $C\in\boldsymbol{R}$

$$x=\gamma_{(O,e)}\xi_P+C \qquad \text{(証明終)}$$

例（2.6.4）　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{V_M})$ において，劣光速世界線 X が定速度であるとする．したがって $O\in X$，$X_O:\boldsymbol{R}\to X$ を X の固有時刻表示とするとき

（i）　$\exists\,\boldsymbol{u}\in T^{\uparrow}_U,\quad \forall\xi\in\boldsymbol{R},\quad X_O'(\xi)=\boldsymbol{u}$

が成り立つ．すなわち $\boldsymbol{u}$ は単位未来ベクトルである．

（ii）　慣性系 $(O,\boldsymbol{u})=(X_O(0_\xi),X_O'(0_\xi))$ を考えると $\forall\xi\in R$

$$X_O(\xi)=X_O(0_\xi)+\int_0^\xi X_O'(\xi)d\xi=O+\xi\boldsymbol{u}$$

$$\therefore\quad X_O(\xi)=O+\xi\boldsymbol{u}+\boldsymbol{o}^M$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{E}^S(\boldsymbol{u})\cong\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{u})$$

$$X_O(\xi)=(O+\xi\boldsymbol{u},\,O+\boldsymbol{o}^M)\mapsto(\xi,\,\boldsymbol{o}^M)$$

よって，劣光速世界線 X と同じ定時空速度 $\boldsymbol{u}\in T^{\uparrow}\subseteqq\boldsymbol{V_M}$ で動く慣性系 $(O,\boldsymbol{u})$ から見るとき，慣性時刻は固有時刻と等しく，世界線 X 上の ∀ 位置 $X_O(\xi)$ の空間位置

$$O=\boldsymbol{o}^M\in\boldsymbol{E}^S(\boldsymbol{u})\cong\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{u})$$

は原点にあって不変である．すなわち X は静止して見える．

命題（2.6.5）　X を劣光速世界線，$P\in X$，$X_P:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{M}$，$\xi\mapsto X_P(\xi)$ を固有時刻表示とする．このとき，$\forall Q=X_P(\xi_Q)\in X$，$\xi_Q\in\boldsymbol{R}$，

$$\begin{aligned}(Q,\boldsymbol{e}) &:=(Q,DX(Q))\\ &=(X_P(\xi_Q),X_P'(\xi_Q))\in(X,T^{\uparrow}_U)\end{aligned}$$

と置くとき，

（i）$(Q, \boldsymbol{e})$ は慣性系であって

（ii）$X_P(\xi)=P+x(\xi)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(\xi)$

とすると

$$\frac{dX_P}{d\xi}(\xi_Q)=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{o}^M=(1, \boldsymbol{o}^M)$$

すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{d\xi}(\xi_Q)=\boldsymbol{o}^S, \qquad \frac{dx}{d\xi}(\xi_Q)=1$$

が成り立つ．すなわち，各瞬間 $\xi_Q \in \boldsymbol{R}$ において，ある慣性系があって，そこから見るとき，動点 X は静止し，固有時刻 ξ の変化はその慣性系における時刻変化に等しい．この慣性系

$$(Q, \boldsymbol{e})=(X_P(\xi_Q), X_P'(\xi_Q))$$

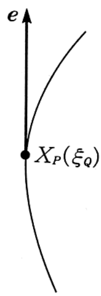


図 2.3

を世界線 X に対する固有時刻 ξ_Q における**静止系**または**固有慣性系**という．

証明　（i）

$$\|\boldsymbol{e}\|_T=\|X_P'(\xi)\|_T=1$$

による．

（ii）

$$X_P(\xi)=X_{(P,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(P,e)}(x)$$

$$X_P'(\xi)=\frac{dx}{d\xi}\boldsymbol{e}+\frac{d\boldsymbol{x}_{(P,e)}}{d\xi}$$

$$\boldsymbol{e}=X_P'(\xi_Q)=\frac{dx}{d\xi}(\xi_Q)\boldsymbol{e}+\frac{d\boldsymbol{x}_{(P,e)}}{d\xi}(\xi_Q)$$

$$\therefore \quad \frac{d\boldsymbol{x}_{(P,e)}}{d\xi}(\xi_Q)=\boldsymbol{o}^S, \qquad \frac{dx}{d\xi}(\xi_Q)=1$$
（証明終）

劣光速世界線 X とともに動く時計を考えると，この時計 X が刻む時刻が世界線 X の固有時刻 ξ にほかならない．なぜなら，時計は各瞬間 $\xi_0 \in \boldsymbol{R}$ にその静止系における時刻を刻むのであり，固有時刻 ξ の変化は慣性系

$$(Q, \boldsymbol{e})=(X_P(\xi_0), X_P'(\xi_0))$$

における時刻変化に等しいからである．

命題（2.6.6）（旅行者の時計と留守番の時計）劣光速世界線 X と $\forall(O, \boldsymbol{e}) \in X \times T^{\downarrow}_{U}$ について，O を基準点とする X の固有時刻 ξ の変化は $(O, \boldsymbol{e})$ における慣性時刻の変化を超えない．すなわち，

$$X_O(\xi)=X_{(O,e)}(x)=O+x(\xi)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(\xi)$$

において，

$$\xi_1<\xi_2 \quad \Rightarrow \quad x(\xi_2)-x(\xi_1) \geqq \xi_2-\xi_1$$

証明
$$\frac{dx}{d\xi} \geqq 1 \quad (2.5.1)$$

$$x(\xi_2)-x(\xi_1)=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{dx}{d\xi}d\xi \geqq \int_{\xi_1}^{\xi_2}1\,d\xi=\xi_2-\xi_1$$
（証明終）

第3章　ベクトルの Lorentz boost と 座標の Lorentz boost

Lorentz 変換の中でも特にベクトルの Lorentz boost $b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = b_e(F\boldsymbol{e}_1)$ が重要である．Lorentz boost の全体は群をなさないが，$\boldsymbol{e} \in T^{\downarrow}_U$，$\boldsymbol{e}_1 \in V(\boldsymbol{e})$ のとき，写像

$$\boldsymbol{R} \to L^{\uparrow}(V), \qquad \theta \mapsto b_e(\mathrm{tgh}(\theta)\boldsymbol{e}_1)$$

は群の単射準同型である．特にその像

$$L^{\mathrm{boost}}{}_e(\boldsymbol{e}_1) := \{b_e(F\boldsymbol{e}_1) \mid |F| < 1\}$$

は群をなし，

$$\boldsymbol{R} \cong L^{\mathrm{boost}}{}_e(\boldsymbol{e}_1)$$

である．

Minkowski 空間の座標変換のなかでは，座標の Lorentz boost (§3.4) が重要である．

§3.1　双曲回転移動 $H(\theta)$

$V = V^{(n,1)}$，$S(\mathcal{U}_V) := (\mathcal{U}_V$ から $\mathcal{U}_V$ への全単射の全体) とする．

$O(n, 1)$ は集合 $\mathcal{U}_V$ に右から可遷的かつ自由に作用する．そこで

$$\rho : O(n, 1) \hookrightarrow S(\mathcal{U}_V)$$

$$A \to (\mathcal{U}_V \ni \varepsilon \mapsto \varepsilon A \in \mathcal{U}_V)$$

は単射反準同型である (1.2.7)．

復習 (3.1.1)　同じ次元の Minkowski 線型空間の間の線型写像

$$h : V^{(n,1)} \to W^{(n,1)}$$

が条件

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V, \qquad \langle h(\boldsymbol{a}) \mid h(\boldsymbol{b}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \rangle_M$$

を満たすとき，h を Minkowski 線型空間の計量同型写像であると呼んだ．こ

のとき h は同型写像である (1.1.8).

記号 (3.1.2)　$V=V^{(n,1)}$, $\varepsilon=(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U}_V$ とし, $(\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n)$ を $\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ の自然基底とする (1.2.2). このとき線型写像

$$\mathrm{Coord}_\varepsilon : V\to\boldsymbol{R}^{(n,1)},\quad \boldsymbol{x}=x^0\boldsymbol{e}_0+x^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n \mapsto x^0\boldsymbol{g}_0+x^1\boldsymbol{g}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{g}_n=\begin{bmatrix}x^0\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix}$$

は Minkowski 線型空間の計量同型写像である.

$$\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{x}):=\mathrm{Coord}_\varepsilon(x^0\boldsymbol{e}_0+x^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n)=\begin{bmatrix}x^0\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^{(n,1)},$$

$$\langle\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{x})\mid\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{y})\rangle_M=-x^0y^0+x^1y^1+\cdots+x^ny^n$$
$$=\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M$$

定義 (3.1.3)　$V=V^{(n,1)}$, $\varepsilon'=\varepsilon A\in\mathcal{U}_V$, $A\in O(n,1)$ ならば,

$$A^{-1}=\mathrm{Coord}_{\varepsilon'}\circ\mathrm{Coord}_{\varepsilon^{-1}}\in L(\boldsymbol{R}^{(n,1)})=O(n,1)$$

である. 写像 $A^{-1}=\mathrm{Coord}_{\varepsilon'}\circ\mathrm{Coord}_{\varepsilon^{-1}}$ を**座標の斉次 Lorentz 変換**という.

双曲回転移動について述べるまえに円運動について復習する.

復習 (3.1.4)　(i)　開区間

$$I_{\pi/2}=(-\pi/2, \pi/2)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid -\pi/2<x<\pi/2\}$$

を定義域とする正接関数

$$\tan(x)$$

を考える. その値域は $\boldsymbol{R}$ である. $x, y, x+y\in I_{\pi/2}$ のとき

$$\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-(\tan(x))(\tan(y))}$$

が成り立つ.

(ii)　$T=\tan(x)$ とおくと, 余弦関数, 正弦関数は,

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2}},\qquad \sin(x)=\frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$$

(iii)　$R(\theta):=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

は直交行列であって,

$$R(\phi+\psi)=R(\phi)R(\psi)$$

が成り立つ.

（iv）　$V=V_E^2$ を 2 次元の有向 Euclid 線型空間,$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\in\mathcal{U}_V^+$ とする.このとき,原点 $\boldsymbol{o}\in V_E^2$ のまわりの一般角 θ の回転移動 f は $\boldsymbol{e}_1$ の移動先

$$f(\boldsymbol{e}_1)=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$

で定まり,このとき

$$f(\boldsymbol{e}_2)=(-\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$

である.

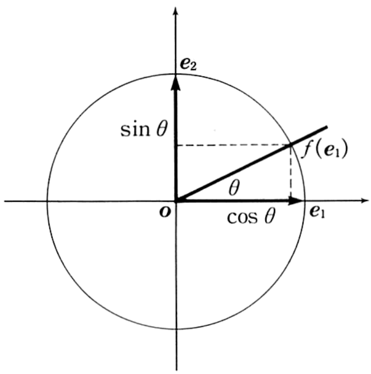


図 3.1

よって f：$V_E^2\to V_E^2$ は

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2))=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)R(\theta)$$

により定まる.

（v）　つぎに,基底列の変換 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\mapsto(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ が始めに与えられたとする.そのとき,

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)R(\theta)$$

とすれば $\boldsymbol{x}\in V_E^2$ の座標は

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=y^1\boldsymbol{f}_1+y^2\boldsymbol{f}_2=[\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2]\begin{bmatrix}y^1\\y^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y^1\\y^2\end{bmatrix}=R(\theta)^{-1}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix}=R(-\theta)\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix}$$

と変化する．

補題（3.1.5）　（i）　双曲線正接関数

$$\mathrm{tgh}(x)=\tanh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

の定義域は $\boldsymbol{R}$，値域は開区間 $I_1=(-1,1)=\{T\in\boldsymbol{R}\mid -1<T<1\}$ である．

$$\mathrm{tgh}(x+y)=\frac{\mathrm{tgh}(x)+\mathrm{tgh}(y)}{1+(\mathrm{tgh}(x))(\mathrm{tgh}(y))}$$

が成り立つ．

（ii）　$T=\mathrm{tgh}(x)$ と置くと，双曲線余弦関数，双曲線正弦関数

$$\mathrm{csh}(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{snh}(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

は，

$$\mathrm{csh}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-T^2}},\qquad \mathrm{snh}(x)=\frac{T}{\sqrt{1-T^2}}$$

証明　（i）　略．

（ii）

$$1-T^2=1-\mathrm{tgh}^2(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{\mathrm{csh}^2(x)}$$

$\mathrm{tgh}(x)=\dfrac{\mathrm{snh}(x)}{\mathrm{csh}(x)}$ より，

$$\mathrm{snh}(x)=\mathrm{tgh}(x)\mathrm{csh}(x)=\frac{T}{\sqrt{1-T^2}}$$

（証明終）

補題（3.1.6）　（i）　開区間 I_1 は

(イ)　演算

$$F \circ G := \frac{F+G}{1+FG}$$

により，群をなす．単位元は 0 である．

(ロ)　加法群 $\boldsymbol{R}$ から群 I_1 への写像

$$\mathrm{tgh} : \boldsymbol{R} \to I_1, \qquad x \mapsto \mathrm{tgh}(x)$$

は同型写像である．

(ii)　$\boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ を単位未来ベクトルとする．このとき，

(イ)　開線分

$$I_1(\boldsymbol{e}_1) := \{\boldsymbol{f}^S = T\boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \mid |T| = \|\boldsymbol{f}^S\|_S < 1\}$$

は演算

$$(F\boldsymbol{e}_1) \circ (G\boldsymbol{e}_1) := \frac{F+G}{1+FG}\boldsymbol{e}_1 \qquad \cdots①$$

により，群をなす．単位元は $\boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{e}_1$ である．

(ロ)　加法群 $\boldsymbol{R}$ から群 $I_1(\boldsymbol{e}_1)$ への写像

$$u : \boldsymbol{R} \to I_1(\boldsymbol{e}_1), \qquad f \mapsto (\mathrm{tgh}\, f)\boldsymbol{e}_1$$

は同型写像である．

証明　(i)　関数 $\mathrm{tgh}(x)$ の性質より，$\mathrm{tgh} : \boldsymbol{R} \to I_1$ は全単射である．

$$\forall F, G \in I_1, \quad \exists f, g \in \boldsymbol{R}, \quad F = \mathrm{tgh}(f), \quad G = \mathrm{tgh}(g)$$

が成り立つ．このとき，

$$F \circ G = \frac{F+G}{1+FG} = \frac{\mathrm{tgh}(f)+\mathrm{tgh}(g)}{1+\mathrm{tgh}(f)\mathrm{tgh}(g)}$$
$$= \mathrm{tgh}(f+g) \in I_1$$

したがって，演算①によって開線分 I_1 は群をなし，

$$\boldsymbol{R} \cong I_1$$

(ii)　当然．　(証明終)

補題 (3.1.7)　行列

$$H(\theta) := \begin{bmatrix} \mathrm{csh}\,\theta & \mathrm{snh}\,\theta \\ \mathrm{snh}\,\theta & \mathrm{csh}\,\theta \end{bmatrix}$$

に対し

(i)　$$\det H(\theta) = 1$$

(ii)
$$H(\phi+\psi)=H(\phi)H(\psi)$$
$$H(\theta)^{-1}=H(-\theta)$$

が成り立つ．

(iii)　$H(\theta)$ は擬直交行列である．もっと詳しく

$$H(\theta)\in O^{\uparrow}_{+}(1,1)=O^{\uparrow}(1,1)\cap O^{+}(1,1)$$

証明　(i)　$\det H(\theta)=\mathrm{csh}^2\,\theta-\mathrm{snh}^2\,\theta=1$

(ii)　$H(\phi+\psi)=\begin{bmatrix}\mathrm{csh}(\phi+\psi) & \mathrm{snh}(\phi+\psi)\\ \mathrm{snh}(\phi+\psi) & \mathrm{csh}(\phi+\psi)\end{bmatrix}$ …①

$$\mathrm{csh}(\phi+\psi)=\mathrm{csh}\,\phi\,\mathrm{csh}\,\psi+\mathrm{snh}\,\phi\,\mathrm{snh}\,\psi$$
$$\mathrm{snh}(\phi+\psi)=\mathrm{snh}\,\phi\,\mathrm{csh}\,\psi+\mathrm{csh}\,\phi\,\mathrm{snh}\,\psi$$

であるから，

$$①の右辺=\begin{bmatrix}\mathrm{csh}\,\phi & \mathrm{snh}\,\phi\\ \mathrm{snh}\,\phi & \mathrm{csh}\,\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{csh}\,\psi & \mathrm{snh}\,\psi\\ \mathrm{snh}\,\psi & \mathrm{csh}\,\psi\end{bmatrix}$$
$$=H(\phi)H(\psi)$$
$$H(\theta)H(-\theta)=H(\theta-\theta)=H(0)=I \text{ より}$$
$$H(-\theta)=H(\theta)^{-1}$$

(iii)　$G=(-\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ に対し

$${}^{t}H(\theta)GH(\theta)=H(\theta)\begin{bmatrix}-\mathrm{csh}\,\theta & \mathrm{snh}\,\theta\\ \mathrm{snh}\,\theta & \mathrm{csh}\,\theta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-\mathrm{csh}^2\,\theta+\mathrm{snh}^2\,\theta & 0\\ 0 & -\mathrm{snh}^2\,\theta+\mathrm{csh}^2\,\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=G$$
$$\therefore\quad H(\theta)\in O(1,1)$$

である (1.2.2)．

$$\det H(\theta)=1>0 \text{ より } H(\theta)\in O^{+}(1,1)$$

単位未来ベクトル $\boldsymbol{g}_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in T^{\uparrow}_{U}\subseteqq \boldsymbol{R}^{(1,1)}$ に対し，

$$H(\theta)\boldsymbol{g}_0=\begin{bmatrix}\mathrm{csh}\,\theta\\ \mathrm{snh}\,\theta\end{bmatrix}$$
$$\langle H(\theta)\boldsymbol{g}_0 \mid \boldsymbol{g}_0\rangle_M=-\mathrm{csh}\,\theta<0$$

$\therefore$　$H(\theta)\boldsymbol{g}_0$ も未来ベクトル，$\therefore$　$H(\theta)\in O^{\uparrow}(1,1)$

$$H(\theta)\in O^{\uparrow}(1,1)\cap O^{+}(1,1) \qquad \text{(証明終)}$$

定義（3.1.8）　$V=V^{(1,1)}$ を 2 次元の Minkowski 線型空間，$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)$ を V の正規直交基底列とする．このとき，擬直交行列 $H(\theta)$ に対し，

$$(f(\boldsymbol{e}_0), f(\boldsymbol{e}_1))=(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$

すなわち

$$f(\boldsymbol{e}_0)=\mathrm{csh}\,\theta\,\boldsymbol{e}_0+\mathrm{snh}\,\theta\,\boldsymbol{e}_1$$
$$f(\boldsymbol{e}_1)=\mathrm{snh}\,\theta\,\boldsymbol{e}_0+\mathrm{csh}\,\theta\,\boldsymbol{e}_1$$

により定まる Lorentz 変換 $f: V\to V$ を原点 $\boldsymbol{o}\in V$ のまわりの一般角 $i\theta=\sqrt{-1}\theta$ の**双曲回転移動**という．$\cos i\theta=\mathrm{csh}\,\theta$ に注意しよう．

補題（3.1.9）　$V=V^{(1,1)}$ において，擬直交行列 $H(\theta)$ が定める基底列の変換

$$(\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$

が定める座標の Lorentz 変換は $H(\theta)^{-1}=H(-\theta)$ である．すなわち，$\boldsymbol{x}\in V$ の座標は

$$\boldsymbol{x}=x_0\boldsymbol{e}_0+x_1\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)\begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=y_0\boldsymbol{f}_0+y_1\boldsymbol{f}_1=(\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1)\begin{bmatrix}y_0\\y_1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)\begin{bmatrix}y_0\\y_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_0\\y_1\end{bmatrix}=H(\theta)^{-1}\begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}=H(-\theta)\begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}$$

と変化する．これを座標の**双曲変換**とよぶ．

§3.2　ベクトルの Lorentz boost $b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$

$V=V^{(n,1)}$ を Minkowski 線型空間とする．

$$T_U^{\downarrow}:=(V \text{ の単位未来ベクトルの全体})$$

と置いた．$\boldsymbol{e}\in T_U^{\downarrow}\subseteqq V$ を定め，Euclid 線型空間 $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ における単位開球

$$B_1(\boldsymbol{e})=\{\boldsymbol{g}^S\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \mid \|\boldsymbol{g}^S\|_S<1\}$$

を考える．このとき，条件 $\boldsymbol{f}=-\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{g}^S)=\gamma_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{g}^S)(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{g}^S)$ で定まる写像

$$\beta : T_U^{\downarrow} \to B_1(\boldsymbol{e}), \qquad \boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S = \frac{\boldsymbol{f}}{-\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M} - \boldsymbol{e}$$

は全単射である（1.4.6）．

補題（3.2.1）　$\boldsymbol{e} \in T_U^{\downarrow}$ を定めたとき，$\boldsymbol{f} \in T_U^{\downarrow}$ に対し，

（i）
$$\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S \in B_1(\boldsymbol{e})$$

とするとき．$\exists\,\theta \in \boldsymbol{R}$，$\exists\,\boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$，$\|\boldsymbol{e}_1\|_S = 1$

$$\boldsymbol{g}^S = (\mathrm{tgh}\,\theta)\boldsymbol{e}_1$$
$$\boldsymbol{f} = (\mathrm{csh}\,\theta)\boldsymbol{e} + (\mathrm{snh}\,\theta)\boldsymbol{e}_1$$

と表される．

（ii）　$\boldsymbol{f}_1 := (\mathrm{snh}\,\theta)\boldsymbol{e} + (\mathrm{csh}\,\theta)\boldsymbol{e}_1$ と置けば

$$\boldsymbol{f}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f}), \qquad \|\boldsymbol{f}_1\|_S = 1$$

である．このとき，以上のような3組 $(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)$ の全体を

$$\Gamma_e(\boldsymbol{f})$$

と表す．

$$\Gamma_e(\boldsymbol{f}) := \{(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \mid \theta \in \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}),\ \|\boldsymbol{e}_1\|_S = 1,\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)\}$$
$$\Delta_e(\boldsymbol{f}) := \{(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f}) \mid \theta \geqq 0\} \subset \Gamma_e(\boldsymbol{f})$$

と置く．

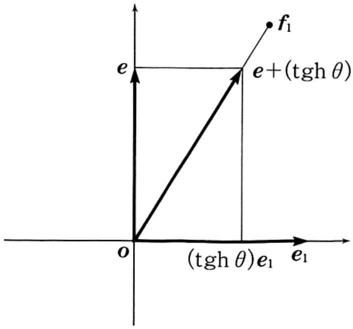


図 3.2

（iii）　$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}$ のとき，$\theta = 0$，$|\Gamma_e(\boldsymbol{f})| = \infty$，$|\Delta_e(\boldsymbol{f})| = \infty$．

$$\Gamma_e(\boldsymbol{f}) = \{(0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) \mid \forall\,\boldsymbol{e}_1 \in B_1(\boldsymbol{e})\} = \Delta_e(\boldsymbol{f})$$

$\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{f}$ のとき，$|\Gamma_e(\boldsymbol{f})|=2$，$|\Delta_e(f)|=1$

$$\Gamma_e(\boldsymbol{f})=\{(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1),\ (-\theta, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{f}_1)\}$$

であるが，

$$(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1=(\mathrm{tgh}(-\theta))(-\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{g}^S$$

は結局 1 個しかない．

証明　(i)　$\mathrm{tgh}\ \theta=\|\boldsymbol{g}^S\|_S$ とすると，

$\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{f}$ のとき，$\boldsymbol{g}^S \neq \boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{g}^S/\|\boldsymbol{g}^S\|_S$ と置けば，

$$\|\boldsymbol{e}_1\|_S=1, \qquad \boldsymbol{g}^S=(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$

$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{f}$ のとき，$\boldsymbol{g}^S=\boldsymbol{o}$，$\|\boldsymbol{e}_1\|_S=1$ なる $\forall \boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ をとればよい．

このとき，
$$\gamma_e(\boldsymbol{g}^S)=\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{tgh}\ \theta)^2}}=\mathrm{csh}\ \theta$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=\gamma_e(\boldsymbol{g}^S)\boldsymbol{e}+\gamma_e(\boldsymbol{g}^S)(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1\\&=(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}+(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1\end{aligned}$$

(ii)
$$\langle \boldsymbol{f}_1 \mid \boldsymbol{f}\rangle_M=-(\mathrm{csh}\ \theta)(\mathrm{snh}\ \theta)+(\mathrm{csh}\ \theta)(\mathrm{snh}\ \theta)=0$$
$$\|\boldsymbol{f}_1\|_S{}^2=\langle \boldsymbol{f}_1 \mid \boldsymbol{f}_1\rangle_M=(\mathrm{csh}\ \theta)^2-(\mathrm{snh}\ \theta)^2=1$$

(iii)　$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}+(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1\\&=(\mathrm{csh}(-\theta))\boldsymbol{e}+(\mathrm{snh}(-\theta))(-\boldsymbol{e}_1)\\-\boldsymbol{f}_1&=-(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}-(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1\\&=(\mathrm{snh}(-\theta))\boldsymbol{e}+(\mathrm{csh}(-\theta))(-\boldsymbol{e}_1)\end{aligned}$$
$$\therefore\quad (-\theta, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$$

また，$\forall (\phi, \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{f}_1') \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ とすると，

$$\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{g}^S=(\mathrm{tgh}\ \phi)\boldsymbol{e}_1'=(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1.$$
$$\therefore\quad (\phi, \boldsymbol{e}_1')=\pm(\theta, \boldsymbol{e}_1),$$
$$\therefore\quad (\phi, \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{f}_1')=\pm(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)$$　(証明終)

補題 (3.2.2)　相異なる $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in T^1_U$，$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ に対し，

$$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1), \qquad (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)$$

はともに，空間

$$W := \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}$$

の正規直交基底である．

証明　(イ)　$\boldsymbol{e}_1 \in W$，$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)$ が W の正規直交基底なること：

$$\boldsymbol{f} = (\operatorname{csh}\theta)\boldsymbol{e} + (\operatorname{snh}\theta)\boldsymbol{e}_1$$
$$= (\operatorname{csh}\theta)(\boldsymbol{e} + (\operatorname{tgh}\theta)\boldsymbol{e}_1)$$

より，

$$(\operatorname{tgh}\theta)\boldsymbol{e}_1 \in W, \quad \boldsymbol{e}_1 \in W = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{f} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{e}_1$$

である．ゆえに，$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)$ は W の正規直交基底をなす．

(ロ)　$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)$ が W の正規直交基底で，$H(-\theta) \in O(1, 1)$

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(-\theta)$$

だから，$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)$ は $W = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1$ の正規直交基底をなす (1.2.3)．（証明終）

補題（3.2.3）　Minkowski 線型空間 $(V, \langle\ |\ \rangle_M)$，$\boldsymbol{e} \in T_U^{\updownarrow}$，$\boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$，$\|\boldsymbol{e}_1\|_S = 1$ のとき，

$$\forall \boldsymbol{x} \in V, \qquad \exists_1 \boldsymbol{z} \in \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1\}^{\perp}$$
$$\boldsymbol{x} = -\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M \boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{z} \qquad \cdots①$$

この $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{x}_\perp$ で表す．よって $x^0 = -\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M$，$x^1 = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M$ と置けば

$$\boldsymbol{x} = x^0\boldsymbol{e} + x^1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}_\perp$$

証明　一意性：　$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M \boldsymbol{e} - \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M \boldsymbol{e}_1$ による．

存在：

$$\boldsymbol{z} := \boldsymbol{x} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M \boldsymbol{e} - \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M \boldsymbol{e}_1$$

と置く．

$$\langle \boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M - \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{e}$$
$$\langle \boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M - \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{e}_1$$

（証明終）

補題（3.2.4）　$V = V^{(n,1)}$，$\varepsilon = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_+^{\updownarrow}$ を定めたとき，$f \in L(V)$ に対し，

$$f(\varepsilon) = \varepsilon M(f)$$

と置けば，$M(f) \in O(n, 1)$ であって，

（i）　f の成分表示は

$$\boldsymbol{x} = x^0\boldsymbol{e} + x^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n = \varepsilon \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

$$\mapsto f(\boldsymbol{x}) = y^0\boldsymbol{e} + y^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y^n\boldsymbol{e}_n = \varepsilon M(f)\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = M(f)\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

（ii）　基底変換 $\varepsilon \to f(\varepsilon) = \varepsilon M(f)$ が定める座標変換は

$$M(f)^{-1} = \mathrm{Coord}_{f(\varepsilon)} \circ \mathrm{Coord}_\varepsilon : \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = M(f)^{-1}\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

（証明終）

命題と定義（3.2.5）　2つの $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in T^\downarrow_U$，$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Delta_e(\boldsymbol{f})$，したがって

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$

に対し，

（i）　線型写像 $b : V = \boldsymbol{Re} \oplus \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \to V = \boldsymbol{Re} \oplus \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$,

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + x^1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}_\perp \mapsto y\boldsymbol{f} + y^1\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{x}_\perp$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y^1 \end{bmatrix} = H(\theta)^{-1}\begin{bmatrix} x \\ x^1 \end{bmatrix} = H(-\theta)\begin{bmatrix} x \\ x^1 \end{bmatrix}$$

すなわち

$$y = (\mathrm{csh}\,\theta)x + (-\mathrm{snh}\,\theta)x^1$$

$$y^1 = (-\mathrm{snh}\,\theta)x + (\mathrm{csh}\,\theta)x^1$$

を考える．$T = \mathrm{tgh}\,\theta$ を用いて表せば，

$$y = (x - \langle \boldsymbol{x} \mid T\boldsymbol{e}_1 \rangle_M)\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1)$$

$$y^1 = (-Tx + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle)\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1)$$

$$\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1) = \mathrm{csh}\,\theta$$

$H(\theta) \in O(1,1)^\downarrow_U$ であるから，$b \in L^\downarrow_U(V)$ である．

（ii）　b は $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ のみにより定まり，θ には依存しない．

$$(b(\boldsymbol{e}), b(-\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}, -\boldsymbol{e}_1)H(-\theta)$$

証明　（ii）のみを証明すればよい．$C := \mathrm{csh}\,\theta$，$S := \mathrm{snh}\,\theta$ と置く．

（i）　$$\Gamma_e(\boldsymbol{f}) = \{(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1),\ (-\theta, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{f}_1)\}$$

$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)$ の代りに $(-\theta, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{f}_1)$ を用いれば，$T=\mathrm{tgh}\,\theta$ は $-T=\mathrm{tgh}(-\theta)$ となる．

$$T\boldsymbol{e}_1=(\mathrm{tgh}\,\theta)\boldsymbol{e}_1=(\mathrm{tgh}(-\theta))(-\boldsymbol{e}_1)$$

は $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ のみにより定まり，y と $y\boldsymbol{e}$ とは $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ のみにより定まる．また

$$y^1=(-Tx+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle)\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1)$$

は $-y^1$ となるから，$y^1\boldsymbol{e}_1$ は $(-y^1)(-\boldsymbol{e}_1)=y^1\boldsymbol{e}_1$ となって不変．結局 $y\boldsymbol{e}+y^1\boldsymbol{e}_1$ は $(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)\in\Gamma_e(\boldsymbol{f})$ の取り方によらない．　　　　（証明終）

定理（3.2.6）　$n\geqq 2$，$n+1$ 次元の Minkowski 線型空間 $\boldsymbol{V}^{(n,1)}$ において，$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\in T^{\downarrow}_{U}\subseteqq \boldsymbol{V}^{(n,1)}$，　$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)\in\Gamma_e(\boldsymbol{f})$，したがって

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$

に対し，

（i）　$W=\boldsymbol{Re}+\boldsymbol{Rf}=\boldsymbol{Re}+\boldsymbol{Re}_1=\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Rf}_1$，$(\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U}_{W\perp}$ とするとき，$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U}$ に対し，線型写像 b を条件

$$(b(\boldsymbol{e}), b(\boldsymbol{e}_1), b(\boldsymbol{e}_2), \cdots, b(\boldsymbol{e}_n))=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} H(\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

により定義する．

（ii）　$\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})\ni\boldsymbol{x}^S=\boldsymbol{x}_\perp\perp\boldsymbol{e}_1$ すなわち $\boldsymbol{x}_\perp\in W_\perp$ のときには，b により

$$\boldsymbol{x}^S\mapsto\boldsymbol{x}^S$$

（iii）　b はまた条件

$$(b(\boldsymbol{e}), b(-\boldsymbol{e}_1), b(\boldsymbol{e}_2), \cdots, b(\boldsymbol{e}_n))=(\boldsymbol{e}, -\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

で定義するといっても同じ事である．

（iv）　b は斉次 Lorentz 変換である．変換 b を

$$b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}),\qquad b_e((\mathrm{tgh}\,\theta)\boldsymbol{e}_1)$$

と書き表わし，$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ に関するまたは $\boldsymbol{e}$ から $\boldsymbol{f}$ へのベクトルの**特殊 Lorentz 変換**，純粋な **Lorentz 変換**または**双曲回転**ともいう．**Lorentz boost** ともいう．

$$b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})=1_V$$

である．

証明　$C := \operatorname{csh}\theta$，$S := \operatorname{snh}\theta$ と置く．

（i）
$$\Gamma_e(\boldsymbol{f}) = \{(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1),\ (-\theta, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{f}_1)\}$$

（ii）　$\boldsymbol{x}^S \in W$ のとき，$\boldsymbol{x}^S = x\boldsymbol{e} + x^1\boldsymbol{e}_1$ として，
$$(b(\boldsymbol{e}), b(\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$
$$\begin{aligned} b(x\boldsymbol{e} + x^1\boldsymbol{e}_1) &= xb(\boldsymbol{e}) + x^1 b(\boldsymbol{e}_1) \\ &= (Cx - Sx^1)\boldsymbol{e} + (Sx + Cx^1)\boldsymbol{e}_1 \\ &= x(C\boldsymbol{e} + S\boldsymbol{e}_1) + x^1(S\boldsymbol{e} + C\boldsymbol{e}_1) \end{aligned}$$
$$(x, x^1) = (1, 0) \text{ のとき，} b(\boldsymbol{e}) = C\boldsymbol{e} + S\boldsymbol{e}_1$$
$$(x, x^1) = (0, 1) \text{ のとき，} b(\boldsymbol{e}_1) = S\boldsymbol{e} + C\boldsymbol{e}_1$$

（iii）　当然：$\boldsymbol{x}^S \in W$ かつ $b \mid W = \mathrm{id}$ であるから．

（iv）　行列
$$M(b) = \begin{bmatrix} H(\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}$$
が擬直交行列だから，b は斉次 Lorentz 変換である．

$b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = 1_V$ なることは
$$\boldsymbol{f} = (\operatorname{csh}\theta)\boldsymbol{e} + (\operatorname{snh}\theta)\boldsymbol{e}_1$$
において，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}$，　∴　$\operatorname{csh}\theta = 1$，$\theta = 0$，$H(0) = I$
$$(b(\boldsymbol{e}), b(\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(0) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)$$
なることより，分かる．　（証明終）

記号（3.2.7）　$\boldsymbol{e} \in T_U^{\downarrow}$ とする．$\boldsymbol{x} \in V = V^{(n,1)}$ を
$$\boldsymbol{x} = x^0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S \in \boldsymbol{Re} \oplus V^S(\boldsymbol{e})$$
と表すとき，

（i）　写像 $T_e : V \to V$
$$\boldsymbol{x} = x^0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S \mapsto -x^0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S$$
を <u>$\boldsymbol{e}$ に関する</u>**時間共役**または**時間反転**（**time reversal**）という．<u>$\boldsymbol{x}$ の時間共役</u> $T_e(\boldsymbol{x})$ を
$$\bar{\boldsymbol{x}}^{T_e},\quad T_e(\boldsymbol{x}),\quad T(x),\quad \bar{\boldsymbol{x}}^T$$
とも表す．

（ii）　写像 $S_e : V \to V$

$$\boldsymbol{x}=x^0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^S \mapsto \bar{\boldsymbol{x}}=x^0\boldsymbol{e}-\boldsymbol{x}^S$$

を $\boldsymbol{e}$ に関する**空間共役**または**空間反転**（**space reflection**）または**パリティ変換**（**parity transformation**）という．$\boldsymbol{x}$ の空間共役 $S_e(\boldsymbol{x})$ を

$$\bar{\boldsymbol{x}}^e, \quad S_e(\boldsymbol{x}), \quad S(\boldsymbol{x}), \quad \bar{\boldsymbol{x}}$$

とも表す．

$$\forall \boldsymbol{x}\in V, \quad ST(\boldsymbol{x})=TS(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M&=\langle T\boldsymbol{x} \mid T\boldsymbol{y}\rangle_M=\langle S\boldsymbol{x} \mid S\boldsymbol{y}\rangle_M\\&=-x_0y_0+\langle \boldsymbol{x}^S \mid \boldsymbol{y}^S\rangle_S\end{aligned}$$

が成り立ち，時間反転 T，空間反転 S はともに Lorentz 変換である．

$$T\in L^{\downarrow}(V), \qquad S\in L^{\uparrow}(V)$$

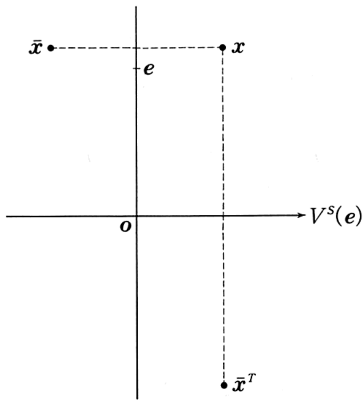


図 3.3

系（3.2.8）　$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\in T^{\updownarrow}_U$，$\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{f}$，$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)\in\Gamma_e(\boldsymbol{f})$ のとき，ベクトルの Lorentz boost $b=b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ により

$$\boldsymbol{e}\mapsto \boldsymbol{f} \qquad \cdots①$$

$$\boldsymbol{e}_1\mapsto \boldsymbol{f}_1 \qquad \cdots②$$

$$\boldsymbol{f}=(\operatorname{csh}\theta)\boldsymbol{e}+(\operatorname{snh}\theta)\boldsymbol{e}_1\mapsto \boldsymbol{e}\mapsto(\operatorname{csh}\theta)\boldsymbol{f}+(\operatorname{snh}\theta)\boldsymbol{f}_1 \qquad \cdots③$$

$$\boldsymbol{f}_1=(\operatorname{snh}\theta)\boldsymbol{e}+(\operatorname{csh}\theta)\boldsymbol{e}_1\mapsto \boldsymbol{e}_1\mapsto(\operatorname{snh}\theta)\boldsymbol{f}+(\operatorname{csh}\theta)\boldsymbol{f}_1 \qquad \cdots④$$

である．

証明　$C := \operatorname{csh}\theta$，$S := \operatorname{snh}\theta$ と置く．

①②：　すでに述べたように (3.2.6)

$$(b(\boldsymbol{e}), b(\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)$$
$$b(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{f}$$
$$b(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{f}_1$$

である．

③④：　b が線型写像であることと，①②より明らか．　(証明終)

定理 (3.2.9)　$V = V^{(n,1)}$，相異なる $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in T_U^{\downarrow}$，$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Delta_e(\boldsymbol{f})$

$$W := \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1$$
$$(\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_{W\perp}$$

とする．このとき，

（i）　$\varepsilon = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$，$\varepsilon' = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_+^{\downarrow}$ とおけば，基底変換 $\varepsilon \to \varepsilon'$ が定める座標変換は

$$B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) := \mathrm{Coord}_{\varepsilon'} \circ \mathrm{Coord}_{\varepsilon^{-1}} = \begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix} \in L(\boldsymbol{R}^{(n,1)})$$

すなわち

$$V \ni \boldsymbol{x} = x^0\boldsymbol{e} + x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n = y^0\boldsymbol{f} + y^1\boldsymbol{f}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n$$

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \mapsto B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

である．これを，$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ に関する**座標の Lorentz boost** という．

（ii）　$\mathrm{Coord}_\varepsilon$：$V^{(n,1)} \cong \boldsymbol{R}^{(n,1)}$，$\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{g}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ により，

$$\boldsymbol{u} := \mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{f})$$

$$=\mathrm{Coord}_\varepsilon(\mathrm{csh}\,\theta\boldsymbol{e})+\mathrm{Coord}_\varepsilon(\mathrm{snh}\,\theta\boldsymbol{e}_1)$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{csh}\,\theta\\ \mathrm{snh}\,\theta\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1:=\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{f}_1)$$

$$=\mathrm{Coord}_\varepsilon(\mathrm{snh}\,\theta\boldsymbol{e})+\mathrm{Coord}_\varepsilon(\mathrm{csh}\,\theta\boldsymbol{e}_1)$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{snh}\,\theta\\ \mathrm{csh}\,\theta\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})=b(\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{u})$$

$$=b(\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{e}),\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{f}))$$

であって，$B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$ は $\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ のベクトルの Lorentz boost である．これを速度 $(\mathrm{tgh}\,\theta)\boldsymbol{u}_1$ の**座標の boost 変換**ともいう．

証明　(i)　$x^0\boldsymbol{e}+x^1\boldsymbol{e}_1=y^0\boldsymbol{f}+y^1\boldsymbol{f}_1$

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix}H(\theta)&O\\ O&I_{n-1}\end{bmatrix}$$

であるから，(1.5.3) により，

$$B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})=\begin{bmatrix}H(-\theta)&O\\ O&I_{n-1}\end{bmatrix}$$

(ii)　$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1)=(\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{f}),\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{f}_1))$

$$=(\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{e}),\mathrm{Coord}_\varepsilon(\boldsymbol{e}_1))H(-\theta)$$

$$=(\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_1)H(-\theta)$$

による．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

系 (3.2.10)　(i)　ベクトルの Lorentz boost $b(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}): V^{(n,1)}\to V^{(n,1)}$ は写像である．座標の Lorentz boost $B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}):\boldsymbol{R}^{(n,1)}\to\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ は元 $\boldsymbol{x}\in V^{(n,1)}$ の座標の変換であって，$\boldsymbol{x}$ 自身は $B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$ によっては動かない．しかしながら，

(ii)　基底列 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に関するベクトルの Lorentz boost $b=b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\in L(V^{(n,1)})$ の表現行列 $M(b)$ は座標の Lorentz boost $B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\in L(\boldsymbol{R}^{(n,1)})$ の自然基底に関する行列の逆行列に等しい.

$$B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})=\begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}=M(b)$$

以下相異なる $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\in T^{\downarrow}_{U}$ と $(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)\in \varDelta_e(\boldsymbol{f})$, $T:=\mathrm{tgh}\,\theta$ を固定する.

定理 (3.2.11)　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\in V$,

$$\boldsymbol{x}=x^0\boldsymbol{e}+x^1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$$

$$\boldsymbol{x}'=b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\boldsymbol{x}=b_e(T\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{x}$$

のとき

(i)　$\boldsymbol{x}'=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}_1\rangle_M\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$　…②

$\quad=\overline{\{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}_1\rangle_M\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp\}}^T$

(ii)　$\boldsymbol{x}'=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}-\boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}_1-\boldsymbol{e}_1\rangle_M\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}$　…③

(iii)　$\boldsymbol{x}'=\overline{\{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M\boldsymbol{f}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{x}_\perp\}}^T$　…④

$\quad=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M\boldsymbol{f}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{x}_\perp$

証明　$C:=\mathrm{csh}\,\theta$, $S:=\mathrm{snh}\,\theta$ と置く.

$x^0=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M$, $x^1=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M$ と置けば

$$\boldsymbol{x}=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M\boldsymbol{e}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp \quad \cdots ①$$

$$=x^0\boldsymbol{e}+x^1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$$

(i)　$\boldsymbol{x}'=b_e(T\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{x}$

$\quad=b_e(T\boldsymbol{e}_1)(x^0\boldsymbol{e}+x^1\boldsymbol{e}_1)+b_e(T\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{x}_\perp$

$\quad=x^0(C\boldsymbol{e}-S\boldsymbol{e}_1)+x^1(-S\boldsymbol{e}+C\boldsymbol{e}_1)+\boldsymbol{x}_\perp$

$\quad=(x^0C-x^1S)\boldsymbol{e}+(-x^0S+x^1C)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$

$\quad=(-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_MC-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_MS)\boldsymbol{e}$

$\qquad+(\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_MC+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_MS)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$

$\quad=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}C+\boldsymbol{e}_1S\rangle_M\boldsymbol{e}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1C+\boldsymbol{e}S\rangle_M\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$

$\quad=-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}\rangle_M\boldsymbol{e}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}_1\rangle_M\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$　…②

(ii)　$\boldsymbol{x}_\perp=\boldsymbol{x}+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M\boldsymbol{e}-\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1\rangle_M\boldsymbol{e}_1$ (1.5.4) を②に代入すればよい.

(iii)　②より,

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{x}'}^T &= \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f} \rangle_M \boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}_1 \rangle_M \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}_\perp \\ &= \langle \boldsymbol{x} \mid C\boldsymbol{e} + S\boldsymbol{e}_1 \rangle_M \boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{x} \mid S\boldsymbol{e} + C\boldsymbol{e}_1 \rangle_M \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}_\perp \\ &= \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M (C\boldsymbol{e} + S\boldsymbol{e}_1) + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M (S\boldsymbol{e} + C\boldsymbol{e}_1) + \boldsymbol{x}_\perp \\ &= \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M \boldsymbol{f} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{x}_\perp \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}' = \overline{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M \boldsymbol{f} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M \boldsymbol{f}_1}^T + \boldsymbol{x}_\perp$$

(証明終)

定理　(3. 2. 12)　$V = V^{(n,1)}$ を Minkowski 線型空間とする．$\boldsymbol{e} \in T^{\uparrow}_U$，$\boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ を単位ベクトルとする．このとき，

$$F, G \in I_1 = (-1, 1), \qquad H := \frac{F+G}{1+FG}$$

とおけば，$H \in I_1$ であって

(i)
$$\frac{1+FG}{\sqrt{1-F^2}\sqrt{1-G^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-H^2}}$$

(ii)
$$b_e(F\boldsymbol{e}_1) \circ b_e(G\boldsymbol{e}_1) = b_e(H\boldsymbol{e}_1)$$

(iii)　写像

$$\boldsymbol{R} \to L^{\uparrow}(V^{(n,1)}), \qquad \theta \mapsto b_e(\mathrm{tgh}(\theta)\boldsymbol{e}_1)$$

は群の単射準同型である．特に，その像

$$L^{\mathrm{boost}}{}_e(\boldsymbol{e}_1) := \{b_e(F\boldsymbol{e}_1) \mid |F| < 1\}$$

は $L^{\uparrow}(V^{(n,1)})$ の部分群をなし，

$$\boldsymbol{R} \cong L^{\mathrm{boost}}{}_e(\boldsymbol{e}_1)$$
$$\theta \mapsto b_e(\mathrm{tgh}(\theta)\boldsymbol{e}_1)$$

証明　(i)

$$\frac{1+FG}{\sqrt{1-F^2}\sqrt{1-G^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-F^2-G^2+F^2G^2}{(1+FG)^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1+FG)^2-(F+G)^2}{(1+FG)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-H^2}}$$

(ii)　(iii)　$I_1 \to L^{\uparrow}(V^{(n,1)})$，$F \mapsto b_e(F\boldsymbol{e}_1)$ が単射準同型を示せばよい．

準同型を示すには，$H := \dfrac{F+G}{1+FG}$ のとき，

$$b_e(G\boldsymbol{e}_1) \circ b_e(F\boldsymbol{e}_1) = b_e(H\boldsymbol{e}_1)$$

が成り立つことを示せばよい. $\forall \boldsymbol{x} \in V$,

$$\boldsymbol{x} \overset{b_e(Fe_1)}{\mapsto} \boldsymbol{x}' \overset{b_e(Ge_1)}{\mapsto} \boldsymbol{x}''$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{e}+F\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-F^2}}, \qquad \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{e}+G\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-G^2}}, \qquad \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{e}+H\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-H^2}},$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{F\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-F^2}}, \qquad \boldsymbol{g}_1 = \frac{G\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-G^2}}, \qquad \boldsymbol{h}_1 = \frac{H\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-H^2}}$$ とする.

$$\boldsymbol{x} = -\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M \boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}_\perp \qquad \cdots ①$$

$$\boldsymbol{x}' = -\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f} \rangle_M \boldsymbol{e} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}_1 \rangle_M \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}_\perp \qquad \cdots ②$$

$$\boldsymbol{x}'' = \overline{\{\langle \boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{e} \rangle_M \boldsymbol{g} + \langle \boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M \boldsymbol{g}_1\}}^T + \boldsymbol{x}_\perp \qquad \cdots ⑤ \text{(④による)}$$

$$= \overline{\{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f} \rangle_M \boldsymbol{g} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}_1 \rangle_M \boldsymbol{g}_1\}}^T + \boldsymbol{x}_\perp \qquad \text{(②を⑤に代入)}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}''^T = \frac{1}{\sqrt{1-F^2}\sqrt{1-G^2}}\{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}+F\boldsymbol{e}_1 \rangle_M (\boldsymbol{e}+G\boldsymbol{e}_1)$$
$$+\langle \boldsymbol{x} \mid F\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1 \rangle_M (G\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1)\} + \boldsymbol{x}_\perp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-F^2}\sqrt{1-G^2}}\{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M (\boldsymbol{e}+G\boldsymbol{e}_1+FG\boldsymbol{e}+F\boldsymbol{e}_1)$$
$$+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M (F\boldsymbol{e}+FG\boldsymbol{e}_1+G\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1)\} + \boldsymbol{x}_\perp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-F^2}\sqrt{1-G^2}}\{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M ((1+FG)\boldsymbol{e}+(F+G)\boldsymbol{e}_1)$$
$$+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M ((F+G)\boldsymbol{e}+(1+FG)\boldsymbol{e}_1\} + \boldsymbol{x}_\perp$$

$$= \frac{1+FG}{\sqrt{1-F^2}\sqrt{1-G^2}}\{\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M (\boldsymbol{e}+H\boldsymbol{e}_1)$$
$$+\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M (H\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1)\} + \boldsymbol{x}_\perp$$

ここで(i)を用いて,

$$= \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M \frac{\boldsymbol{e}+H\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-H^2}} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M \frac{H\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-H^2}} + \boldsymbol{x}_\perp$$

$$= \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M \boldsymbol{h} + \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_M \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{x}_\perp$$

(3.2.11) の④より

$$\boldsymbol{x}'' = b_e(H\boldsymbol{e}_1)$$

$$I_1 \to L^{\uparrow}(V^{(n,1)}), \qquad F \mapsto b_e(F\boldsymbol{e}_1) = b\left(\boldsymbol{e}, \frac{\boldsymbol{e}+F\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-T^2}}\right)$$

が単射なることは，$F \neq 0$ ならば $\dfrac{\boldsymbol{e}+F\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-T^2}} \neq \boldsymbol{e}$ なることより分かる．(証明終)

系 (3. 2. 13)　$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in T_U^{\downarrow}$,

(i)
$$b_e(F\boldsymbol{e}_1)^{-1} = b_e(-F\boldsymbol{e}_1)$$

(ii)　$\Gamma_e(\boldsymbol{f}) = \{(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1), (-\theta, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{f}_1)\}$ のとき，
$$\Gamma_f(\boldsymbol{e}) = \{(-\theta, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_1), (\theta, -\boldsymbol{f}_1, -\boldsymbol{e}_1)\}$$

(iii)
$$b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})^{-1} = b(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e})$$

証明　(i)　(3. 2. 12) の (ii) より，
$$b_e(F\boldsymbol{e}_1) \circ b_e(-F\boldsymbol{e}_1) = b_e(\boldsymbol{0}) = 1_V$$

(ii)　$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ は，2つの条件
$$\boldsymbol{Re}+\boldsymbol{Rf} = \boldsymbol{Re}+\boldsymbol{Re}_1 = \boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Rf}_1$$
$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta) = (b(\boldsymbol{e}), b(\boldsymbol{e}_1)) \qquad \cdots①$$
より定まるのであった (3. 2. 2)．
$$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)H(\theta)$$
$$\therefore \quad (-\theta, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_1) \in \Gamma_f(\boldsymbol{e})$$

(iii)　$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ のとき，$b = b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ は
$$(b(\boldsymbol{e}), b(\boldsymbol{e}_1)) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$
で定まった (3. 2. 6)．

$(-\theta, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_1) \in \Gamma_f(\boldsymbol{e})$ より，$c = b(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e})$ は
$$(c(\boldsymbol{f}), c(\boldsymbol{f}_1)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)H(-\theta)$$
で定まる．そこで等式 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)H(-\theta)$ に c を作用して，
$$(c\boldsymbol{e}, c\boldsymbol{e}_1) = (c\boldsymbol{f}, c\boldsymbol{f}_1)H(-\theta)$$
$$= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)H(-\theta)H(-\theta)$$
ここで (3. 2. 8) より
$$= (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(-\theta)$$
この等式に $b = b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ を作用して，①を用いて
$$(bc(\boldsymbol{e}), bc(\boldsymbol{e}_1)) = (b(\boldsymbol{e}), b(\boldsymbol{e}_1))H(-\theta)$$
$$= (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)$$
$$\therefore \quad W = \boldsymbol{Re}+\boldsymbol{Re}_1 = \boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Rf}_1 \text{ 上で } b \circ c = 1_V$$

である．$W\perp$ でも $b\circ c=1_V$ だから，$b\circ c=1_V$

$$b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})^{-1}=b(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e})$$ (証明終)

系 (3.2.14) $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\in T^{\downarrow}_{U}$, $F=\mathrm{tgh}\,\phi$, $G=\mathrm{tgh}\,\psi$,

$$\boldsymbol{f}=(\mathrm{csh}\,\phi)(\boldsymbol{e}+F\boldsymbol{e}_1)=(\mathrm{csh}\,\phi)\boldsymbol{e}+(\mathrm{snh}\,\phi)\boldsymbol{e}_1$$
$$\boldsymbol{g}=\mathrm{csh}\,\psi(\boldsymbol{f}+G\boldsymbol{f}_1)=(\mathrm{csh}\,\psi)\boldsymbol{f}+(\mathrm{snh}\,\psi)\boldsymbol{f}_1$$
$$W=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}_1$$

とし，

$$(\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U}_{W\perp}$$

とする．このとき，$H=F\circ G=:\mathrm{tgh}(\phi+\psi)$ とおけば，$\boldsymbol{x}\in V$ の座標は

$$\boldsymbol{x}=x^0\boldsymbol{e}+x^1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$$
$$=z^0\boldsymbol{g}+z^1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{x}_\perp$$
$$\boldsymbol{x}_\perp=x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n$$
$$\begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}=H(-\phi-\psi)\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}$$

と変わる．

証明

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\phi)$$
$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}_1)=(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)H(\psi)$$

および，$H(\phi)H(\psi)=H(\phi+\psi)$ より，

$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}_1)=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\phi+\psi)$$
$$\boldsymbol{x}=x^0\boldsymbol{e}+x^1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{x}_\perp$$
$$=y^0+y^1\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{x}_\perp$$
$$=z^0\boldsymbol{g}+z^1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{x}_\perp$$
$$\boldsymbol{x}_\perp=x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n$$
$$\begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \end{bmatrix}=H(-\phi)\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}=H(-\psi)\begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \end{bmatrix}$$

および $H(-\psi)H(-\phi)=H(-\phi-\psi)$ より，

$$\begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}=H(-\phi-\psi)\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}$$ (証明終)

命題 (3.2.15) $\boldsymbol{V}^{(3,1)}$ において，$\boldsymbol{e}\in T^{\downarrow}_{U}$，$\boldsymbol{p}_e\in V^S(\boldsymbol{e})$

$$V_M \supseteqq T^{\uparrow} \ni \forall \boldsymbol{P} = p_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_e \leftrightarrow Obs_e(\boldsymbol{P}) = (p_0, \boldsymbol{p}_e)$$

に対し，$p_0 > \|\boldsymbol{p}_e\|_S$ であって，

$$\boldsymbol{f} := \frac{\boldsymbol{P}}{\sqrt{-\langle \boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} \rangle_M}} = \frac{p_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_e}{\sqrt{{p_0}^2 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S^2}}$$

とおき，座標の Minkowski boost：$B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ を行なえば，新慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ において，

(i)
$$\boldsymbol{P} = \left(\sqrt{{p_0}^2 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S^2}\right) \boldsymbol{f}$$
$$\leftrightarrow Obs_f(\boldsymbol{P}) = \left(\sqrt{{p_0}^2 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S^2}, \boldsymbol{o}^M\right)$$

(ii)
$$\boldsymbol{p}_e = \|\boldsymbol{p}_e\|_S \boldsymbol{e}_1, \quad (\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$$
$$\mathrm{W} := \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1$$
$$(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathcal{U}_{W\perp}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} V \ni \forall \boldsymbol{x} &= x^0 \boldsymbol{e} + x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3 \\ &= y^0 \boldsymbol{f} + y^1 \boldsymbol{f}_1 + y^2 \boldsymbol{e}_2 + y^3 \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

に対し，

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{p_0 x^0 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S x^1}{\sqrt{{p_0}^2 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S^2}} \\ y^1 &= \frac{-\|\boldsymbol{p}_e\|_S x^0 + p_0 x^1}{\sqrt{{p_0}^2 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S^2}} \\ y^2 &= x^2 \\ y^3 &= x^3 \end{aligned}$$

である．すなわち

$$\begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{{p_0}^2 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S^2}} \begin{bmatrix} p_0 & -\|\boldsymbol{p}_e\|_S \\ -\|\boldsymbol{p}_e\|_S & p_0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

証明　(i)　$\boldsymbol{P} = p_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_e \in T^{\uparrow}$ より，$p_0 > \|\boldsymbol{p}_e\|_S$，

$$q_0 = \sqrt{-\langle \boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} \rangle_M} = \sqrt{{p_0}^2 - \|\boldsymbol{p}_e\|_S^2} > 0$$
$$\boldsymbol{P} = q_0 \boldsymbol{f}, \qquad Obs_f(\boldsymbol{P}) = (q_0, \boldsymbol{o}^M)$$

(ii)
$$\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{P}}{\sqrt{-\langle \boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P}\rangle_M}}=\frac{p_0\boldsymbol{e}+\|\boldsymbol{p}_e\|_S\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{{p_0}^2-\|\boldsymbol{p}_e\|_S{}^2}}$$

と

$$\boldsymbol{f}=(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}+(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$

より，

$$(\mathrm{csh}\ \theta, \mathrm{snh}\ \theta)=\left(\frac{p_0}{\sqrt{{p_0}^2-\|\boldsymbol{p}_e\|_S{}^2}}, \frac{\|\boldsymbol{p}_e\|_S}{\sqrt{{p_0}^2-\|\boldsymbol{p}_e\|_S{}^2}}\right)$$

$$\begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^3 \end{bmatrix}=B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta)\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\mathrm{csh}\ \theta)x^0+(-\mathrm{snh}\ \theta)x^1 \\ (-\mathrm{snh}\ \theta)x^0+(\mathrm{csh}\ \theta)x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad y^0=\frac{p_0x^0-\|\boldsymbol{p}_e\|_Sx^1}{\sqrt{{p_0}^2-\|\boldsymbol{p}_e\|_S{}^2}}$$

$$y^1=\frac{-\|\boldsymbol{p}_e\|_Sx^0+p_0x^1}{\sqrt{{p_0}^2-\|\boldsymbol{p}_e\|_S{}^2}}$$

(証明終)

§3.2 の練習問題

問題 1.　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, V^{(3,1)})$ において，$V=V^{(n,1)}$ とする．$\boldsymbol{e}\in T_U^{\downarrow}\subseteqq V$ を定める．このとき，

(i)　$\forall \boldsymbol{f}\in T_U^{\downarrow}$, $\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M\leqq -1$ である．そこで

$$\mathrm{csh}\ \theta=-\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M\geqq 1$$

と置く．そのとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=-\langle \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e}\rangle_M(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{g}^S)\\ &=(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}+(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1\end{aligned}$$

$$\exists\, \boldsymbol{g}^S, \boldsymbol{e}_1\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}),\quad \|\boldsymbol{e}_1\|_S=1$$

$$\boldsymbol{g}^S=(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$

と表される．$\boldsymbol{f}_1:=(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}+(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$ と置けば

$$\boldsymbol{f}_1\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f}),\qquad \|\boldsymbol{f}_1\|_S=1$$

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$

$$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)=(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)H(-\theta)$$
$$\boldsymbol{e}=(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{f}+(-\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{f}_1$$
$$\boldsymbol{e}_1=(-\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{f}+(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{f}_1$$

となる．

（ii）　$\forall \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\in T_{U}^{\downarrow}$ を定めたとき，

$$X:=\{O+x\boldsymbol{e} \mid x\in \boldsymbol{R}\}$$
$$Y:=\{O+x\boldsymbol{f} \mid x\in \boldsymbol{R}\}$$

は世界線である．

$$X_{(O,f)}(y)=O+y\boldsymbol{f}+y(-\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{f}_1$$
$$Y_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+x(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$

（iii）　X, Y がそれぞれ定める写像

$$\iota_X=\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(O,f)}: \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{f}),$$
$$\iota_Y=\iota_Y{}^{(O,e)}{}_{(O,f)}: \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{f})$$

は

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(O,f)}(x)=x(\mathrm{csh}\ \theta), \qquad \iota_Y{}^{(O,e)}{}_{(O,f)}(x)=\frac{x}{\mathrm{csh}\ \theta}$$

であって，特に，$\boldsymbol{e}\neq \boldsymbol{f}$ のとき両者は等しくない．

$$\iota_X\neq\iota_Y$$

答

1.　（i）　(1.6.1) 参照．

（ii）　(イ)　$X_{(O,e)}(x):=O+x\boldsymbol{e}\in C^\infty(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M})$

と置けば

$$\mathrm{Im}\ X_{(O,e)}=X=\{O+x\boldsymbol{e} \mid x\in \boldsymbol{R}\}$$

である．

$$\mathrm{Im}\ X_{(O,f)}=X=\{O+x\boldsymbol{e} \mid x\in \boldsymbol{R}\}$$
$$=\{O+x((\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{f}+(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{f}_1)\}$$

であるから，

$$X_{(O,f)}(y)=O+y\boldsymbol{f}+y(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{f}_1$$

を得る．

(ロ)　$Y_{(O,f)}(y):=O+y\boldsymbol{f}$ についても同様で

$$\mathrm{Im}\ Y_{(O,f)}=Y=\{O+y\boldsymbol{f} \mid y\in \boldsymbol{R}\}$$
$$=\{O+y((\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}+(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1)\}$$

であるから，

$$Y_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+x(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$

である．

(iii)　写像 ι_X：$\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{f})$，$x\mapsto y(x)$ は

$$X_{(O,e)}(x)=X_{(O,f)}(y(x))$$

$$O+x(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{f}+x(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{f}_1=O+x\boldsymbol{e}$$

$$=O+y(x)\boldsymbol{f}+y(x)(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{f}_1$$

より定まるから，

$$\iota_X(x)=y(x)=x\ \mathrm{csh}\ \theta=\frac{x(\mathrm{sgh}\ \theta)}{(\mathrm{tgh}\ \theta)}$$

写像 ι_Y：$\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{f})$，$x\mapsto y(x)$ は

$$Y_{(O,e)}(x)=Y_{(O,f)}(y(x))$$

$$O+x\boldsymbol{e}+x(\mathrm{tgh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1=O+y(x)\boldsymbol{f}$$

$$=O+y(x)(\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}+y(x)(\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$

より，

$$\iota_Y(x)=y(x)=\frac{x}{\mathrm{csh}\ \theta}=\frac{x(\mathrm{tgh}\ \theta)}{\mathrm{snh}\ \theta}$$

である．∴　$\theta\neq 0$ なら，$\mathrm{csh}\ \theta\neq 1$，$\iota_X\neq\iota_Y$．

§ 3.3　空間回転 $R(\theta)$ と双曲回転 $H(\theta)$

補題 (3.3.1)　V_1, V_2, W_1, W_2 を線型空間，$V=V_1\oplus V_2$，$W=W_1\oplus W_2$ とする．

V の元 x_1+x_2 を $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ とも表す．p_1：$V\to V_i$，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\mapsto x_i$ を標準射影，i_1：$V_1\to V$，$x\mapsto\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$ と i_2：$V_2\to V$，$x\mapsto\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix}$ を標準入射とする．このとき

(i)　$$Lin(V, W_1+W_2)\cong Lin(V, W_1)\times Lin(V, W_2)$$

$$f\mapsto\begin{bmatrix}p_1f\\p_2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\end{bmatrix},\qquad f(x)=\begin{bmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\end{bmatrix}$$

(ii)　$$Lin(V_1+V_2, W)\cong Lin(V_1, W)\times Lin(V_2, W)$$

$$g\mapsto(gi_1, gi_2)=(g_1, g_2)$$

$$g\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = g_1(x_1) + g_2(x_2) = [g_1, g_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(iii)　$f_{ji}: V_i \to W_j, \ 1 \leqq i, j \leqq 2$　に対し，

$$(f_{j1}, f_{j2}): V_1 + V_2 \to W_j, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto f_{j1}(x_1) + f_{j2}(x_2)$$

$$\begin{bmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \end{bmatrix}: V_i \to W_1 + W_2, \qquad x_i \mapsto \begin{bmatrix} f_{1i}(x_i) \\ f_{2i}(x_i) \end{bmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{bmatrix} (f_{11}, f_{12}) \\ (f_{21}, f_{22}) \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix} \ \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}\right] =: \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

証明　(i)　容易．

(ii)

$$g\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = g(i_1x_1) + g(i_2x_2)$$

$$= g_1(x_1) + g_2(x_2) = (g_1, g_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$x = x_1 + x_2 \in V_1 + V_2$$

$$\begin{bmatrix} (f_{11}, f_{12}) \\ (f_{21}, f_{22}) \end{bmatrix}(x) = \begin{bmatrix} (f_{11}, f_{12})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ (f_{21}, f_{22})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2) \\ f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2) \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix} \ \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix}(x_1) + \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}(x_2)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11}(x_1) \\ f_{21}(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{12}(x_2) \\ f_{22}(x_2) \end{bmatrix}$$

(証明終)

命題（3.3.2）　線型写像

$$f: V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2, \qquad g: W_1 \oplus W_2 \to U_1 \oplus U_2$$ と

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

に対し，

$$g \circ f = \begin{bmatrix} g_{11} \circ f_{11} + g_{12} \circ f_{21} & g_{11} \circ f_{12} + g_{12} \circ f_{22} \\ g_{21} \circ f_{11} + g_{22} \circ f_{21} & g_{21} \circ f_{12} + g_{22} \circ f_{22} \end{bmatrix}$$

$$=: \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

証明　$x_i \in V_i$

$$f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1) \\ f_{21}(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{12}(x_2) \\ f_{22}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2) \\ f_{21}(x_1)+f_{22}(x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ここに

$$y_1 = f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2) \in W_1$$

$$y_2 = f_{21}(x_1)+f_{22}(x_2) \in W_2$$

$$(g \circ f)(x) = g\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(y_1)+g_{12}(y_2) \\ g_{21}(y_1)+g_{22}(y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}(f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2))+g_{12}(f_{21}(x_1)+f_{22}(x_2)) \\ g_{21}(f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2))+g_{22}(f_{21}(x_1)+f_{22}(x_2)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (g_{11}\circ f_{11}+g_{12}\circ f_{21})(x_1)+(g_{11}\circ f_{12}+g_{12}\circ f_{22})(x_2) \\ (g_{21}\circ f_{11}+g_{22}\circ f_{21})(x_1)+(g_{21}\circ f_{12}+g_{22}\circ f_{22})(x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（証明終）

系 (3.3.3)　未来ベクトル $\boldsymbol{e} \in T_U^{\downarrow} \subseteqq V = V^{(n,1)}$ が定める Minkowski 分解

$$V = \boldsymbol{Re} \oplus V^S(\boldsymbol{e})$$

を考える．

（i）　$\forall \boldsymbol{g} \in Lin(V, V)$,

$$\exists\, g_{TT} \in Lin(\boldsymbol{Re}, \boldsymbol{Re}), \qquad \exists\, g_{TS} \in Lin(V^S(\boldsymbol{e}), \boldsymbol{Re})$$

$$\exists\, \boldsymbol{g}_{ST} \in Lin(\boldsymbol{Re}, V^S(\boldsymbol{e})), \qquad \exists\, \boldsymbol{g}_{SS} \in Lin(V^S(\boldsymbol{e}), V^S(\boldsymbol{e}))$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_{TT} & g_{TS} \\ \boldsymbol{g}_{ST} & \boldsymbol{g}_{SS} \end{bmatrix}$$

と表される．

（ii）　Euclid 線型空間 $V^S(\boldsymbol{e})$ の直交変換の全体を $O(V^S(\boldsymbol{e}))$ で表す．$g_{TT} = 1$，$\boldsymbol{g}_{ST} = \boldsymbol{o}^M$，$g_{TS} = 0$ のとき，

$$\boldsymbol{g} \in L^{\uparrow}(\boldsymbol{V}^{(n,1)}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{g}_{SS} \in O(V^S(\boldsymbol{e}))$$

が成り立つ．このとき，$\boldsymbol{g}$ を空間回転という．

証明　（i）は当然．（ii）　$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S = (x, \boldsymbol{x}^S)$ に対し，

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} g_{TT} & g_{TS} \\ \boldsymbol{g}_{ST} & \boldsymbol{g}_{SS}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \boldsymbol{x}^S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{TT}(x)+g_{TS}(\boldsymbol{x}^S) \\ \boldsymbol{g}_{ST}(x)+\boldsymbol{g}_{SS}(\boldsymbol{x}^S)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x \\ \boldsymbol{g}_{SS}(\boldsymbol{x}^S)\end{bmatrix}=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{g}_{SS}(\boldsymbol{x}^S)$$

(⇒)　$\boldsymbol{g}\in L^{\uparrow}(\boldsymbol{V}^{(n,1)})$ より

$$-x^2+\|\boldsymbol{x}^S\|_S{}^2=\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\rangle_M$$

$$=\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\rangle_M=-x^2+\|\boldsymbol{g}_{SS}(\boldsymbol{x}^S)\|_S{}^2$$

$$\|\boldsymbol{x}^S\|_S=\|\boldsymbol{g}_{SS}(\boldsymbol{x}^S)\|_S$$

$$\boldsymbol{g}_{SS}\in O(V^S(\boldsymbol{e}))$$

(⇐)

$$\langle \boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\rangle_M=-x^2+\|\boldsymbol{x}^S\|_S{}^2$$

$$=-x^2+\|\boldsymbol{g}_{SS}(\boldsymbol{x}^S)\|_S{}^2=\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\rangle_M$$

だから，$\boldsymbol{g}\in L(\boldsymbol{V}^{(n,1)})$ (1. 2. 1) である．

$\boldsymbol{e}=1\boldsymbol{e}+\boldsymbol{o}^M=(1, \boldsymbol{o}^M)$ に対し，

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e})=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{o}^M & \boldsymbol{g}_{SS}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{o}^M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{o}^M\end{bmatrix}=\boldsymbol{e}$$

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{e}$ だから　$\boldsymbol{g}\in L^{\uparrow}(\boldsymbol{V}^{(n,1)})$ である．　　　　(証明終)

命題 (3. 3. 4)　(i)　$\forall f\in L^{\uparrow}(V^{(n,1)})$，$\forall \boldsymbol{e}\in T^{\downarrow}_U$ に対し，$f(\boldsymbol{e})$ は未来単位ベクトルである．そこで，

$$\boldsymbol{f}:=f(\boldsymbol{e})$$

として，ベクトルの Lorentz boost $b=b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ をとれば，

$$g:=b\circ f:\ V=\boldsymbol{Re}\oplus V^S(\boldsymbol{e})\to V$$

は空間回転である．

$$\therefore\quad f=b^{-1}\circ g=(\text{双曲回転})\circ(\text{空間回転})$$

(ii)　空間回転 $f\in L^{\uparrow}(V^{(n,1)})$ は，$f\neq 1_V$ ならば，Lorentz boost ではない．

証明　$b(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{e}$ であった (1. 6. 7)．

(i)

$$g=\begin{bmatrix} g_{TT} & g_{TS} \\ \boldsymbol{g}_{ST} & \boldsymbol{g}_{SS}\end{bmatrix}:=b\circ f$$

$$g_{TT}:\boldsymbol{Re}\to\boldsymbol{Re},\qquad g_{TS}:V^S(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{Re},$$

$$\boldsymbol{g}_{ST}:\boldsymbol{Re}\to V^S(\boldsymbol{e}),\qquad \boldsymbol{g}_{SS}:V^S(\boldsymbol{e})\to V^S(\boldsymbol{e})$$

と置く．$f(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{f}$，$g:=b\circ f$

$$\begin{bmatrix} g_{TT}(\boldsymbol{e}) \\ \boldsymbol{g}_{ST}(\boldsymbol{e}) \end{bmatrix} = g(\boldsymbol{e}) = b(f(\boldsymbol{e})) = b(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{o}^M \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad g_{TT}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{g}_{ST}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{o}^M, \qquad \therefore \quad g_{TT} = 1, \quad \boldsymbol{g}_{ST} = \boldsymbol{o},$$

$\forall \boldsymbol{w} \in V^S(\boldsymbol{e})$，すなわち $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{e}$ に対し，

$$\langle g(\boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = \langle b(f(\boldsymbol{w})) \mid b(\boldsymbol{f}) \rangle_M$$
$$= \langle b(f(\boldsymbol{w})) \mid bf(\boldsymbol{e}) \rangle_M = \langle \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = 0$$
$$\therefore \quad g(\boldsymbol{w}) \in V^S(\boldsymbol{e}), \qquad \therefore \quad g_{TS} = 0$$
$$g = b \circ f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{o} & \boldsymbol{g}_{SS} \end{bmatrix}$$

（ii）　$f = b\left(\boldsymbol{e}, \dfrac{\boldsymbol{e} + T\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1 - T^2}}\right)$ が同時に空間回転であったとすると

$$\frac{\boldsymbol{e} + T\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1 - T^2}} = f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}$$

でなければならない（1.6.7）．ゆえに

$$T = 0, \qquad \therefore \quad f = b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = 1_V$$

（証明終）

Lorentz boost の全体は群をなさない．

例題（3.3.5）　$V = V^{(3,1)}$，$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathcal{U}_U^{\uparrow}$，$\boldsymbol{f} \in T_U^{\uparrow}$

$$(\theta_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f}), \qquad (\theta_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{g}_2) \in \Gamma_e(\boldsymbol{g})$$
$$b_1 = b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = b_e((\mathrm{tgh}\ \theta_1)\boldsymbol{e}_1),$$
$$b_2 = b(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}) = b_e((\mathrm{tgh}\ \theta_2)\boldsymbol{e}_2)$$

とする．このとき

（i）　$C_i := \mathrm{csh}\ \theta_i$，$S_i := \mathrm{snh}\ \theta_i$（$1 \leqq i \leqq 2$）とすると，$b_2 \circ b_1$ が引き起こす座標の Lorentz 変換は

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$
$$= z\boldsymbol{g} + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3$$

のとき，

$$\begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1C_2 & -S_2 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ -C_1S_2 & S_1S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =: A \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

行列 A は対称行列ではないから，Lorentz boost ではないと平川［11］26 頁

には書いてある．A の固有多項式は

$$\varphi_A(t)=(t-1)\{t^3-(C_1+C_2+C_1C_2)t^2+(C_1+C_2+C_1C_2)t-1\}$$
$$=(t-1)^2\{t^2+(1-C_1-C_2-C_1C_2)t+1\}$$

であるから A は固有値 1，固有ベクトルの空間 W は 2 次元である．

よって $b_2\circ b_1$ は Lorentz boost の必要条件を満たす．しかしながら Lorentz boost であるかどうかは，わからない．

（ii）$\boldsymbol{f}:=b_2b_1(\boldsymbol{e})$，$b_3:=b(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$，$r:=b_3\circ b_2b_1$ とおけば，r は空間回転である (3.3.4).

$$\therefore \quad b_2b_1=b_3^{-1}r$$
$$=(\text{双曲回転})\circ(\text{空間回転})$$

解

$$H(-\theta_1)=\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K(-\theta_2)=\begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく．

$$W=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1, \qquad (\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\in\mathcal{U}_{W\perp}$$
$$(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{e}_1)H(\theta_1)$$
$$\boldsymbol{f}=C_1\boldsymbol{e}+S_1\boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{f}_1=S_1\boldsymbol{e}+C_1\boldsymbol{e}_1$$
$$U=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}_2, \qquad (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3)\in\mathcal{U}_{U\perp}$$
$$(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{g}_2)=(\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{e}_2)K(\theta_2)$$
$$\boldsymbol{g}=C_2\boldsymbol{e}+S_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{g}_2=S_2\boldsymbol{e}+C_2\boldsymbol{e}_2$$

とする．このとき，$\boldsymbol{x}\in V$ の表現は

$$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}+x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$
$$=y\boldsymbol{f}+y_1\boldsymbol{f}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3$$
$$=z\boldsymbol{g}+z_1\boldsymbol{e}_1+z_2\boldsymbol{g}_2+z_3\boldsymbol{e}_3$$

のとき，

$$\begin{bmatrix} y \\ y_1 \end{bmatrix}=H(-\theta_1)\begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad y=C_1x-S_1x_1, \qquad y_1=-S_1x+C_1x_1$$

$$y_2=x_2, \qquad y_3=x_3$$

$$\begin{bmatrix} z \\ z_2 \end{bmatrix} = K(-\theta_2)\begin{bmatrix} y \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad z = C_2 y - S_2 y_2, \qquad z_2 = -S_2 y + C_2 y_2$$

$$z_1 = y_1, \qquad z_3 = y_3$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad z &= C_2 y - S_2 y_2 = C_2(C_1 x - S_1 x_1) - S_2 y_2 \\ &= C_1 C_2 x - S_1 C_2 x_1 - S_2 x_2 \\ z_1 &= y_1 = -S_1 x + C_1 x_1 \\ z_2 &= -S_2 y + C_2 y_2 = -S_2(C_1 x - S_1 x_1) + C_2 x_2 \\ &= -C_1 S_2 x + S_1 S_2 x_1 + C_2 x_2 \\ z_3 &= y_3 = x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 C_2 & -S_2 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ -C_1 S_2 & S_1 S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
（証明終）

命題（3.3.6）　V をアフィン線型空間，$2 \leqq q \leqq \dim V$，$\mathscr{A} : T(V^q) \to T(V^q)$ を交代化作用素とする．

$$T(V^q) = A(V^q) \oplus \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$$

であるから，

（i）　$Lin(T(V^q), T(V^q))$

$$= \begin{bmatrix} Lin(A(V^q), A(V^q)) & Lin(\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}, A(V^q)) \\ Lin(A(V^q), \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}) & Lin(\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}, \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}) \end{bmatrix}$$

である（3.3.1）．

（ii）　$Lin(A(V^q), A(V^q)) \hookrightarrow Lin(T(V^q), T(V^q))$

$$f \mapsto \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なる単射がある．

証明　（0.5.9）参照．

§3.4　座標の Lorentz boost $B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta)$

はじめにアフィン空間の場合を復習する．$(\boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{V}_A{}^m)$ を m 次元のアフィン空間，$\mathscr{B}_V$ を $\boldsymbol{V}_A$ の基底列の全体，$GL(\boldsymbol{V}_A)$ を $\boldsymbol{V}_A$ の正則一次変換の全体とす

る．

1つの位置 $O\in \boldsymbol{A}^m$ を原点とする $\boldsymbol{A}^m$ の座標枠の全体を

$$\mathrm{Frame}_O(\boldsymbol{A}^m) := O\times \mathcal{B}_V$$

で表す．

$$\mathrm{Frame}_O(\boldsymbol{A}^m)\cong \mathcal{B}_V, \qquad (O\,;\,\varepsilon)\leftrightarrow\varepsilon$$

である．枠 $\Sigma=(O\,;\,\varepsilon)=(O\,;\,\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\in \mathrm{Frame}_O(\boldsymbol{A}^m)$ が定める座標化

$$\mathrm{Coord}_\Sigma=\mathrm{Coord}_{(O;\boldsymbol{a}_i)} : \boldsymbol{A}^m\cong \boldsymbol{R}^m, \qquad \forall X=O+x^1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x^m\boldsymbol{a}_m \mapsto \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}$$

を定めておく (2. 1. 2)．このとき，

復習 (3. 4. 1)　(ⅰ)　$P=O+p^1\boldsymbol{a}_1+\cdots+p^m\boldsymbol{a}_m\in A$,

$$\begin{aligned}\Sigma'&=(P\,;\,\varepsilon')=(P\,;\,\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m)\\ &=(P\,;\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)A)\in \mathrm{Frame}_P(\boldsymbol{A}^m)\end{aligned}$$

が定める座標化，

$$\mathrm{Coord}_{\Sigma'} : \boldsymbol{A}^m\cong \boldsymbol{R}^m, \qquad X=P+y^1\boldsymbol{b}_1+\cdots+y^m\boldsymbol{b}_m \mapsto \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}$$

は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX}&=y^1\boldsymbol{b}_1+\cdots+y^m\boldsymbol{b}_m\\ \overrightarrow{OX}&=x^1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x^m\boldsymbol{a}_m\\ =\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}&=(p^1+y^1)\boldsymbol{b}_1+\cdots+(p^m+y^m)\boldsymbol{b}_m\end{aligned}$$

より，座標変換

$f=\mathrm{Coord}_{\Sigma'}\circ \mathrm{Coord}_{\Sigma^{-1}} : \boldsymbol{R}^m\cong \boldsymbol{R}^m$,

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}\mapsto \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^m \end{bmatrix}$$

を引き起こす．$f\in \boldsymbol{G}_R{}^m$ を座標枠 Σ から Σ' への**非斉次座標変換**という．

$$
\begin{array}{ccc}
A^m & \overset{\mathrm{Coord}_\Sigma}{\cong} & \boldsymbol{R}^m \\
 & \searrow^{\mathrm{Coord}_{\Sigma'}} & \downarrow f \\
 & & \boldsymbol{R}^m
\end{array}
,\qquad
\begin{array}{ccc}
X = 0 + x^1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x^m\boldsymbol{a}_m & \xmapsto{\mathrm{Coord}_{\Sigma'} = f\circ\mathrm{Coord}_\Sigma} & (x^i) \\
\| & & \downarrow \\
P + y^1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y^m\boldsymbol{b}_m & \longmapsto & (y^i)
\end{array}
$$

（ii）　逆に，$P = O + p^1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + p^m\boldsymbol{a}_m \in A$,

$$\forall f : \boldsymbol{R}^m \cong \boldsymbol{R}^m, \qquad \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \mapsto A^{-1}\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^m \end{bmatrix}$$

に対し，

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) := (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)A$$

$$\Sigma' := (P ; \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathrm{Frame}_P(\boldsymbol{A}^m)$$

とすれば，座標化

$$\mathrm{Coord}_{\Sigma'} = f \circ \mathrm{Coord}_\Sigma : \boldsymbol{A}^m \cong \boldsymbol{R}^m$$

が定まる．

復習（3.4.2）（$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}^{(n,1)}$）を Minkowski 空間，$\boldsymbol{G}_M$ をアフィン空間（$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}^{(n,1)}$）の全単射アフィン変換の全体，とする．$\boldsymbol{M}$ の全 Poincare 群とは，

（i）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_M &= \{f \in Map(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) \mid \forall P, Q \in \boldsymbol{M} \\
&\qquad \langle f(P)f(Q) \mid f(P)f(Q)\rangle_M = \langle PQ \mid PQ\rangle_M\} \\
&= \{\text{アフィン変換 } f = (f, \boldsymbol{f}) \mid \boldsymbol{f} \in L(\boldsymbol{V}^{(n,1)})\} \\
&\subseteqq \boldsymbol{G}_M
\end{aligned}
$$

のことである（3.1.6）．

（ii）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}^{(n,1)} \cong \boldsymbol{T}_M &= (\text{平行移動の全体}) \\
&= \{(f_{\boldsymbol{a}}, I_V) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}^{(n,1)}, \boldsymbol{M} \ni P \overset{f_{\boldsymbol{a}}}{\mapsto} P + \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{M}\} \subseteqq \boldsymbol{P}_M
\end{aligned}
$$

準同型写像 $\sigma : \boldsymbol{P}_M \to L(\boldsymbol{V})$，$(f, \boldsymbol{f}) \mapsto \boldsymbol{f}$ により $\mathrm{Ker}\,\sigma = \boldsymbol{T}_M$

$$\boldsymbol{P}_V / \boldsymbol{T}_M \cong L(\boldsymbol{V}^{(n,1)}) \quad (2.1.8)$$

記号と復習（3.4.3）　Minkowski 空間（$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}^{(n,1)}$）において，

（i）　1つの位置 $O \in \boldsymbol{M}$ を原点とする Minkowski 枠の全体を

$$\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M}) := O \times \mathcal{U}_M$$

で表す．

$$\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M}) \cong \mathcal{U}_M, \qquad (O\,;\,\varepsilon) \leftrightarrow \varepsilon$$

(ii)　($\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$ から $\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$ への全単射の全体) を

$$S(\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M}))$$

で表す．$O(n,1)$ は集合 $\mathcal{U}_V$ と集合 $\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$ に右から，可遷的かつ忠実に作用する．したがって

$$L(\boldsymbol{R}^{(n,1)}) = O(n,1) \hookrightarrow S(\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M}))$$

$$A \mapsto ((O\,;\,\varepsilon) \mapsto (O\,;\,\varepsilon A))$$

は単射反準同型である．

(iii)　$(\boldsymbol{g}_0, \cdots, \boldsymbol{g}_n)$ を $\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ の自然基底列とする．$\Sigma = (O\,;\,\varepsilon) = (O\,;\,\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$ に対し，Σ が定める**座標化**とは Minkowski 同型写像

$$\mathrm{Coord}_\Sigma : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \qquad X = O + x^0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n \mapsto x^0\boldsymbol{g}_0 + \cdots + x^n\boldsymbol{g}_n = \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

のことである (2. 1. 1).

$$X = O + x^0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Coord}_\Sigma(X) = \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

補題　(3. 4. 4)

$$\Sigma = (O\,;\,\varepsilon) = (O\,;\,\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$$

とし，Σ が定める座標化

$$\mathrm{Coord}_{\Sigma'} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \qquad X = O + x^0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n \mapsto x^0\boldsymbol{g}_0 + \cdots + x^n\boldsymbol{g}_n = \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

を定めておく．このとき，

(i)　$\forall \Sigma' = (P\,;\,\varepsilon A) = (P\,;\,\boldsymbol{f}_0, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$

$$= (P\,;\,(\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n)A) \in \mathrm{frame}_P(\boldsymbol{M})$$

$$A \in O^\uparrow(n,1)$$

$$OP = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}$$

が定める座標化,

$$\mathrm{Coord}_{\Sigma'} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \qquad X = P + y^0 \boldsymbol{f}_0 + \cdots + y^n \boldsymbol{f}_n \mapsto \begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

に対し, 写像

$$f = \mathrm{Coord}_{\Sigma'} \circ \mathrm{Coord}_{\Sigma^{-1}} : \boldsymbol{R}^{(n,1)} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}, \qquad \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

を考えれば,

$$\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \vdots \\ t^1 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

$$f : \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} - A^{-1} \begin{bmatrix} t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}$$

が成り立ち (2.1.2). f は $\boldsymbol{R}^{(n,1)}$ の非斉次 Minkowski 変換である. $f \in \boldsymbol{P}_{R^{(n+1)}}$ を Minkowski 枠 $\Sigma \in \mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$ から $\Sigma' \in \mathrm{frame}_P(\boldsymbol{M})$ への**座標の非斉次 Lorentz 変換**という. 特に,

(ii) $P = O$ のとき, $\Sigma = (O\,;\,\varepsilon)$ から $\Sigma' = (P\,;\,\varepsilon A)$ への座標の変換 $f = \mathrm{Coord}_{\Sigma'} \circ \mathrm{Coord}_{\Sigma^{-1}} : \boldsymbol{R}^{(n,1)} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}$ は

$$f : \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \qquad A \in O^{\uparrow}(n, 1)$$

であって, **座標の斉次 Lorentz 変換**にほかならない (3.1.3).

定義 (3.4.5) $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ を Minkowski 空間とする.

(i) $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in T^{\downarrow}_{U} \subseteqq \boldsymbol{V}^{(n,1)}, \qquad (\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Delta_e(\boldsymbol{f}),$

$$W = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1$$

$$(\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_{W\perp}$$

したがって

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1) H(\theta)$$

とする．このとき，

$$\varepsilon=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n), \qquad \varepsilon'=(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$

と置けば，枠 $\Sigma=(O\,;\varepsilon)$ から $\Sigma'=(O\,;\varepsilon')$ への Σ' への座標の斉次 Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta)&=\mathrm{Coord}_{\Sigma'}\circ\mathrm{Coord}_{\Sigma^{-1}} \\ &=\begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}\in \boldsymbol{P}_{R(n,1)} \end{aligned}$$

である (3. 4. 3)．特に，

$$\begin{aligned} y^0&=(\mathrm{csh}\,\theta)x^0+(-\mathrm{snh}\,\theta)x^1 \\ y^1&=(-\mathrm{snh}\,\theta)x^0+(\mathrm{csh}\,\theta)x^1 \end{aligned}$$

である．$B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta)$ は $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta$ のみにより定まり，$(\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U}_{W\perp}$ の取り方には依存しない．これを慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ から $(O, \boldsymbol{f})$ への<u>座標の Lorentz boost</u> という．

（ii）　このとき，2つの Minkowski 枠

$$\begin{aligned} \Sigma&=(O\,;\varepsilon)=(O\,;\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M}) \\ \Sigma'&=(P\,;\varepsilon A)=(P\,;\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\in\mathrm{frame}_P(\boldsymbol{M}) \\ A&=\begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}\in O^{\uparrow}(n,1) \\ OP&=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とすれば，枠 Σ から Σ' への座標の非斉次 Lorentz 変換 $f\in\boldsymbol{P}_{R(n+1)}$ は

$$f=\mathrm{Coord}_{\Sigma'}\circ\mathrm{Coord}_{\Sigma^{-1}}:\boldsymbol{R}^{(n,1)}\to\boldsymbol{R}^{(n,1)},\quad \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

$$f:\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}-A^{-1}\begin{bmatrix} t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \qquad \cdots②$$

であって (2. 1. 2)，(3. 4. 3)，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} H(\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}=B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta)$$

である．座標変換②を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ から $(P, \boldsymbol{f})$ への**座標の非斉次 Lorentz boost** という．座標の Lorentz boost $B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta): \boldsymbol{R}^{(n,1)} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)}$ によって $X \in \boldsymbol{M}$ は動かない．X の 2 つの表現

$$\begin{aligned} X &= O + x\boldsymbol{e} + x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n (\Sigma) \\ &= P + y\boldsymbol{f} + y^1\boldsymbol{f}_1 + y^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + y^n\boldsymbol{e}_n (\Sigma') \end{aligned}$$

の間の関係が②により定まるのである．

(iii)　特に $P=O$ で

$$\Sigma = (O\,;\,\varepsilon) = (O\,;\,\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$$
$$\Sigma' = (O\,;\,\varepsilon A) = (O\,;\,\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathrm{frame}_O(\boldsymbol{M})$$

のときには，

$$\begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{csh}\,\theta & -\mathrm{snh}\,\theta & \\ -\mathrm{snh}\,\theta & \mathrm{csh}\,\theta & \\ & & I_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-T^2}} \begin{bmatrix} 1 & -T \\ -T & 1 \end{bmatrix} & \\ & I_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

である．ここに

$$T = \mathrm{tgh}\,\theta, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-T^2}} = \cosh\theta, \qquad \frac{T}{\sqrt{1-T^2}} = \mathrm{snh}\,\theta$$

である．

(iv)　写像

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta) &= \mathrm{Coord}_{\Sigma'} \circ \mathrm{Coord}_{\Sigma^{-1}} : \boldsymbol{R}^{(n,1)} \to \boldsymbol{R}^{(n,1)} \\ &= \begin{bmatrix} H(-\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

は $(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ に依存する．

もう 1 つの $(-\theta, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ によって得られる写像

$$B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},-\theta)=\begin{bmatrix} H(\theta) & O \\ O & I_{n-1} \end{bmatrix}: \boldsymbol{R}^{(n,1)}\to\boldsymbol{R}^{(n,1)}$$

との間には,

$$B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\theta)=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & I_{n-1} \end{bmatrix} B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},-\theta) \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

なる関係があることが分かる.

定理 (3.4.6)　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ の事象 X を, 2 つの慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$, $(O, \boldsymbol{f})$ において観察する.

$$X=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}=O+y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{y}_{(O,f)}\in\boldsymbol{M}$$

とする.

$$(\theta,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{f}_1)\in\Gamma_e(\boldsymbol{f}), \qquad T=(\mathrm{tgh}\,\theta)$$

$$W:=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1$$

$$(\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{U}_{W\perp}$$

したがって

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$

とする. このとき,

(i)
$$\exists\,\boldsymbol{k}\in W_\perp=\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})\cap\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f})$$
$$\boldsymbol{x}_{(O,e)}=x_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1+W_\perp,$$
$$\boldsymbol{y}_{(O,f)}=y_1\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1+W_\perp$$

となる.

(ii)
$$\boldsymbol{x}_{(O,e)}=xT\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{k} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{y}_{(O,f)}=\boldsymbol{k}$$

すなわち,

$$X=O+x\boldsymbol{e}+xT\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{k} \quad\Leftrightarrow\quad X=O+y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{k}$$

「旧慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ において X が定速度 $T\boldsymbol{e}_1$ で定速度運動をする」

⇔「新慣性系 $(O,\boldsymbol{f})$ において X が定位置 $X=O+\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{f})$ に静止する」

(iii)　$\boldsymbol{x}_{(O,e)}=xT\boldsymbol{e}_1 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{o}^M \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{y}_{(O,f)}=\boldsymbol{o}^M$

証明　(i)　このとき,

$$\varepsilon=(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n), \qquad \varepsilon'=(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$
$$\Sigma=(O\,;\,\varepsilon), \qquad \Sigma'=(O\,;\,\varepsilon')$$

と置けば，$(O, \boldsymbol{e})$ から $(O, \boldsymbol{f})$ への座標の Lorentz boost は

$$B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta)=\mathrm{Coord}_{\Sigma'}\circ\mathrm{Coord}_{\Sigma^{-1}}: \boldsymbol{R}^{(n,1)}\to\boldsymbol{R}^{(n,1)}$$

である．特に，

$$y_0=(\mathrm{csh}\,\theta)x_0+(-\mathrm{snh}\,\theta)x_1$$
$$y_1=(-\mathrm{snh}\,\theta)x_0+(\mathrm{csh}\,\theta)x_1$$
$$y_i=x_i\ (2\leqq i\leqq n)$$

である．

$$OX=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}=:(x\boldsymbol{e}+x_1\boldsymbol{e}_1)+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n\in W+W_\perp$$
$$=y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{y}_{(O,f)}=:(y\boldsymbol{f}+y_1\boldsymbol{f}_1)+y_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{e}_n\in W+W_\perp$$

と置けば，直和 $V=W+W_\perp$ における表現の一意性より

$$\boldsymbol{k}:=x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n=y_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{e}_n\in W_\perp$$

であって，

$$OX=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}=(x\boldsymbol{e}+x_1\boldsymbol{e}_1)+\boldsymbol{k}$$
$$=y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{y}_{(O,f)}=(y\boldsymbol{f}+y_1\boldsymbol{f}_1)+\boldsymbol{k}$$

となる．

(ii) $\mathrm{snh}\,\theta=T\,\mathrm{csh}\,\theta$，したがって

$$y_1=-\mathrm{snh}\,\theta x+\mathrm{csh}\,\theta x_1$$
$$=\mathrm{csh}\,\theta(-Tx+x_1)$$

なることに注意する．

$$\boldsymbol{y}_{(O,f)}=\boldsymbol{k} \quad\Leftrightarrow\quad y_1\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k} \quad\Leftrightarrow\quad y_1=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x_1=Tx \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}_{(O,e)}=x_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{k}=Tx_1\boldsymbol{e}_1$$

(iii) $\boldsymbol{y}_{(O,f)}=\boldsymbol{o}^M \quad\Leftrightarrow\quad y_1\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{o}$

$$\Leftrightarrow\quad y_1=0 \text{ かつ } \boldsymbol{k}=\boldsymbol{o} \quad\Leftrightarrow\quad x_1=Tx \text{ かつ } \boldsymbol{k}=\boldsymbol{o}$$
$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}_{(O,e)}=x_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{k}=Tx_1\boldsymbol{e}_1$$

(証明終)

特に，慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ の基準点

$$O_y=O+y\boldsymbol{f}=(O+y\boldsymbol{f}, O)\in y\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{f})$$

は慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ から見るとき，ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の方向へ $|T|<1$ なる定速度 $T\boldsymbol{e}_1$

$(O, \boldsymbol{e})$ から見た $V^{(2,1)}$ における図

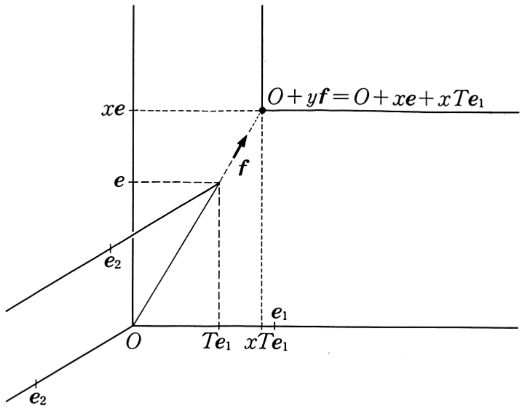


図 3.4

で定速度運動をする.

$$O_y = O + y\boldsymbol{f} = O + x\boldsymbol{e} + xT\boldsymbol{e}_1$$

このことを慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ は慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ に対し定速度 $T\boldsymbol{e}_1$ で移動するという.

すなわち，つぎの (i) が成り立つ.

定理 (3. 4. 7)　∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$，$(O, \boldsymbol{f})$ について，$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$，$T = \mathrm{tgh}\,\theta$ とするとき，

(i)　慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ は慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ に対し定速度 $T\boldsymbol{e}_1$ で移動する，$|T|<1$.

このとき，逆に

(ii)　慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ は慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ に対し定速度 $-T\boldsymbol{f}_1$ で移動する.

証明　(ii)「$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$ のとき

$(O, \boldsymbol{f})$ は $(O, \boldsymbol{e})$ に対し定速度 $T\boldsymbol{e}_1$ で移動する」

したがって $(-\theta, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_1) \in \Gamma_f(\boldsymbol{e})$ に注意すれば，

「$(-\theta, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_1) \in \Gamma_f(\boldsymbol{e})$ より，

$$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1)H(-\theta)$$

$(O, \boldsymbol{e})$ は慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ に対し定速度

$$(\mathrm{tgh}(-\theta))\boldsymbol{f}_1 = -T\boldsymbol{f}_1$$

で移動する」　(証明終)

注意　$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in T^{\downarrow}_{U} \subseteqq \boldsymbol{V}^{(n,1)}$,　$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$,

$$W = \boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Rf} = \boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Re}_1 = \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rf}_1$$

$$(\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{U}_{W\perp}$$

したがって

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1) H(\theta)$$

とする．

(i)
$$\boldsymbol{f} = (\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e} + (\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$
$$\boldsymbol{f}_1 = (\mathrm{snh}\ \theta)\boldsymbol{e} + (\mathrm{csh}\ \theta)\boldsymbol{e}_1$$

$\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{e}$ のとき，$\theta \neq 0$，$\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{f}_1 \rangle_m = -\mathrm{snh}\ \theta \neq 0$ より，

$$\boldsymbol{f}_1 \notin \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}),$$

$$\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f}) \neq \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}), \qquad \therefore \quad \boldsymbol{E}^S(\boldsymbol{e}) \neq \boldsymbol{E}^S(\boldsymbol{f})$$

(ii)　集合としては $\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{f}) \neq \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$ であるが，

「空間 $\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{f})$ を慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ から見た
速度 $T\boldsymbol{e}_1$ の大きさ $\|T\boldsymbol{e}_1\|_S = |T|$」

と

「空間 $\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$ を慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ から見た
速度 $-T\boldsymbol{f}_1$ の大きさ $\|-T\boldsymbol{f}_1\|_S = |T|$」

とは等しい．しかしながら，相対速度

$T\boldsymbol{e}_1$ と $-T\boldsymbol{f}_1$ とを互いに比べることはできない．

一方は線型空間 $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ 内にあり，他方は $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f})$ 内にあるからである．

(証明終)

命題 (3.4.8)　$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ を Minkowski 空間，

(i)　$(O, \boldsymbol{e})$，$(O, \boldsymbol{f})$，$(O, \boldsymbol{g})$ をその慣性系，

$$(\phi, \boldsymbol{e}_{1(e,f)}, \boldsymbol{f}_{1(e,f)}) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f}),$$

$$W = \boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Rf} = \boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Re}_{1(e,f)} = \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rf}_{1(e,f)}$$

$$(\psi, \boldsymbol{f}_{1(f,g)}, \boldsymbol{g}_{1(f,g)}) \in \Gamma_f(\boldsymbol{g}),$$

$$U = \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rg} = \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rf}_{1(f,g)} = \boldsymbol{Rg} + \boldsymbol{Rg}_{1(f,g)}$$

とする．このとき，さらに

$$\dim(\boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rg}) = 2 \quad \text{すなわち} \quad W = U$$

であれば，

(イ)　$\boldsymbol{f}_{1(f,g)} = \pm \boldsymbol{f}_{1(e,f)}$

(ロ)　そこでさらに，$\boldsymbol{f}_1 := \boldsymbol{f}_{1(f,g)} = \boldsymbol{f}_{1(e,f)}$ とする．

$$(O, \boldsymbol{f}) \text{ の } (O, \boldsymbol{e}) \text{ に対する速度を } F\boldsymbol{e}_1,\ F = \mathrm{tgh}\ \phi$$

$$(O, \boldsymbol{g}) \text{ の } (O, \boldsymbol{f}) \text{ に対する速度を } G\boldsymbol{f}_1,\ G = \mathrm{tgh}\ \psi$$

とする．そのとき $(O, \boldsymbol{g})$ の $(O, \boldsymbol{e})$ に対する速度は

$$\mathrm{tgh}(\phi + \psi)\boldsymbol{e}_1$$

である（**速度の加法定理**）．

（ii）$(O, \boldsymbol{e})$，$(O, \boldsymbol{f})$ を2つの慣性系，$(\phi, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f})$，$X$ を定速度の真の世界線，X の静止系を $(O, \boldsymbol{g})$ とする．

$$(O, \boldsymbol{f}) \text{ の } (O, \boldsymbol{e}) \text{ に対する速度を } F\boldsymbol{e}_1,\ F = \mathrm{tgh}\ \phi$$

$$X \text{ の } (O, \boldsymbol{f}) \text{ に対する速度を } G\boldsymbol{f}_1,\ G = \mathrm{tgh}\ \psi$$

$$\dim(\boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rg}) = 2$$

とする．このとき，X の $(O, \boldsymbol{e})$ に対する速度は

$$\mathrm{tgh}(\phi + \psi)\boldsymbol{e}_1$$

である．

証明　（i）(イ)　$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_{1(e,f)})$ と $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_{1(f,g)})$ がともに

$$W = U = \boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Rf} = \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rg}$$

の正規直交基底列であるから，$\boldsymbol{f}_{1(f,g)} = \pm \boldsymbol{f}_{1(e,f)}$ である．

(ロ)

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_{1(e,f)}) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_{1(e,f)})H(\phi)$$

$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}_{1(f,g)}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_{1(f,g)})H(\psi)$$

および，$H(\phi)H(\psi) = H(\phi + \psi)$ より，

$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1)H(\phi + \psi)$$

が成り立つ．ゆえに $(O, \boldsymbol{g})$ の $(O, \boldsymbol{e})$ に対する速度は

$$\mathrm{tgh}(\phi + \psi)\boldsymbol{e}_1$$

である．

（ii）X は定速度だから静止系をもつ．それを $(O, \boldsymbol{g})$ とすれば，X は $(O, \boldsymbol{g})$ において静止する．すなわち

$$X_{(O,g)}(x) = O + x\boldsymbol{g} + \boldsymbol{x}^S(x),$$

$$X_{(O,g)}(0) = O + a_0\boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}^S, \qquad \boldsymbol{a}^S \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{g})$$

とすれば，$x=\xi=$(固有時刻) であって，

$$X_{(O,g)}(x)=O+(a_0+x)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{a}^S$$

が成り立つ (2.2.6)．　(証明終)

命 題 (3.4.9)　$(\boldsymbol{M}^4, \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ を 4 次元の Minkowski 空間，$(O, \boldsymbol{e})$，$(O, \boldsymbol{f})$ をその慣性系，$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1)\in\Gamma_e(\boldsymbol{f})$

$$W:=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1$$

$$(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\in\mathcal{U}_{W\perp}$$

したがって $(O, \boldsymbol{e})$ から見た $(O, \boldsymbol{f})$ の速度が $T\boldsymbol{e}_1=\mathrm{tgh}\,\theta\boldsymbol{e}_1$ とし，X を定速度の真の世界線とし，$(O, \boldsymbol{e})$ と $(O, \boldsymbol{f})$ から見た X の空間速度をそれぞれ

$$\boldsymbol{v}_{(O,e)}\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}), \qquad \boldsymbol{v}_{(O,f)}\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f})$$

とする．そのとき：

(i)
$$X_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$
$$X_{(O,f)}(y)=O+y\boldsymbol{f}+y_1\boldsymbol{f}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3$$

とすれば，

(1)
$$y=\frac{x-Tx_1}{\sqrt{1-T^2}}=(\mathrm{csh}\,\theta)x+(-\mathrm{snh}\,\theta)x_1$$
$$y_1=\frac{-Tx+x_1}{\sqrt{1-T^2}}=(-\mathrm{snh}\,\theta)x+(\mathrm{csh}\,\theta)x_1$$
$$y_2=x_2, \qquad y_3=x_3$$

となる．さらに

$$\boldsymbol{v}_{(O,e)}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{v}_{(O,f)}=w_1\boldsymbol{f}_1+w_2\boldsymbol{e}_2+w_3\boldsymbol{e}_3$$

とすれば，

(2)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-Tv_1}{\sqrt{1-T^2}}>0$$

(3)
$$w_1=\frac{v_1-T}{1-Tv_1},$$

(速度の加法定理) が成り立つ．とくに

(ii)　$\boldsymbol{v}_{(O,e)}=0$ のとき，すなわち $(O, \boldsymbol{e})$ から見た X の速度$=0$ のとき，$T\boldsymbol{e}_1=(O, \boldsymbol{e})$ から見た $(O, \boldsymbol{f})$ の速度$=(O, \boldsymbol{f})$ から見た X の速度$=\boldsymbol{v}_{(O,f)}$ であるから，$\gamma_{(O,e)}(x)=1$ で

$$\gamma_{(P,f)}(y)=\frac{1}{1-T^2}$$

となって，(2.5.8) の結果と一致する．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-T^2}}$$

証明　(i)

$$B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\theta)=\begin{bmatrix} H(\theta) & O \\ O & I_2 \end{bmatrix}$$

$$B(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\theta)(x_i)=(y_i)$$

による．

$$\gamma:=\operatorname{csh}\theta=\frac{1}{\sqrt{1-T^2}}$$ とおく．

(2)

$$\frac{dy}{dx}=\gamma(1-Tv_1),\quad |T|<1,\quad |v_1|\leqq\|\boldsymbol{v}^S{}_e\|<1$$

による．

(3)

$$\frac{dx_1}{dx}=v_1,\qquad \frac{dy_1}{dx}=\gamma(-T+v_1)$$

$$w_1=\frac{dy_1}{dy}=\frac{\dfrac{dy_1}{dx}}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{v_1-T}{1-Tv_1}$$

$$w_2=\frac{dy_2}{dy}=\frac{\dfrac{dx_2}{dx}}{\dfrac{dy}{dx}}$$

$$=\frac{v_2}{\gamma(1-Tv_1)}=\frac{v_2\sqrt{1-T^2}}{1-Tv_1}$$

w_3 についても同様．　(証明終)

第4章　光速度世界線・特殊相対性の仮説

本章では光速度世界線の定義を述べ，いよいよ

「特殊相対性の仮説」と「光の速度不変の仮説」

を導入する（§4.2）．

劣光速世界線とは ∃／∀ 慣性系において慣性速度の大きさが常に電磁波の速さ c より小さな粒子の軌跡である．光速度世界線とは ∃／∀ 慣性系において慣性速度の大きさが常に c に等しく，直進する粒子の軌跡である．

§4.1　光速度世界線の定義

Minkowski 線型空間 $\boldsymbol{V}_M$ において，

$$T=(\text{時間性ベクトルの全体}), \qquad \mathscr{C}=(\text{光ベクトルの全体})$$

と置いた．

補題（4.1.1）　$\boldsymbol{p}\in T$ のとき，$\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}$ について，

（i）　$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M\neq 0$ が成り立つ．もっと詳しく

（ii）　(イ)　$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M\leqq 0 \quad\Rightarrow\quad \langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M<0$

(ロ)　$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M\geqq 0 \quad\Rightarrow\quad \langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M>0$

証明　（i）　大前提 $\boldsymbol{p}\in T$ のもとで，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}_M$ について<u>対偶</u>

「$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}\notin\mathscr{C}$」

を示せばよい．ところで，このことは

$$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}\ \text{は空間性（1.3.2）} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}\notin\mathscr{C}$$

より，確かに成り立つ．

（ii）　（i）より $\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M\neq 0$ なることに注意する．したがって

(イ)　$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M\leqq 0$ のとき，$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M<0$

(ロ)　$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M\geqq 0$ のとき，$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M>0$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

定理（4.1.2）　$\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}\subsetneqq\boldsymbol{V}_M$，$\exists\,\boldsymbol{p}\in T^{\uparrow}$，$\langle\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M<0$

$$\Rightarrow \quad \forall \boldsymbol{q} \in T^{\uparrow}, \ \langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M < 0$$

証明 仮定により

$$\boldsymbol{p} \in T^{\uparrow}, \qquad -\frac{\boldsymbol{p}}{\langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M} \in T^{\uparrow}$$

である．いま仮に $\langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M > 0$ であったとする．このとき $\boldsymbol{q} \in T^{\uparrow}$ より

$$\frac{\boldsymbol{q}}{\langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M} \in T^{\uparrow}$$

である．$T^{\uparrow}$ は加法に関し閉じているから (1.4.3)

$$\boldsymbol{r} := -\frac{\boldsymbol{p}}{\langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M} + \frac{\boldsymbol{q}}{\langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M} \in T^{\uparrow}$$

である．一方 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{C}$ であって，

$$\langle \boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M = -\frac{\langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M}{\langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M} + \frac{\langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M}{\langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M} = -1 + 1 = 0$$

これは (4.1.1) に矛盾する．ゆえに

$$\langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M \leqq 0$$

でなければならない．ところで，このとき，再び (4.1.1) より

$$\langle \boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M < 0$$

でなければならない． (証明終)

定義と命題 (4.1.3) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{(n,1)} \supseteqq \mathscr{C} :=$(光ベクトルの全体)

$$= \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}^M \text{ かつ } \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M = 0 \}$$

(i) $\boldsymbol{x} \in \mathscr{C}$ について，

$\boldsymbol{x}$ **が正，未来** $\Leftrightarrow$ $\exists / \forall \boldsymbol{p} \in T^{\uparrow}, \ \langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M < 0$ (1.4.2)

$\boldsymbol{x}$ **が負，過去** $\Leftrightarrow$ $\exists / \forall \boldsymbol{p} \in T^{\uparrow}, \ \langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M > 0$

と定義する．

(ii) $\mathscr{C}^{\uparrow} :=$(未来光ベクトルの全体)，$\mathscr{C}^{\downarrow} :=$(過去光ベクトルの全体)

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}^{\uparrow} \cup \mathscr{C}^{\downarrow}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathscr{C}^{\uparrow} \quad \Leftrightarrow \quad -\boldsymbol{x} \in \mathscr{C}^{\downarrow}$$

(iii) $\boldsymbol{e}$ が単位未来ベクトル，すなわち $\boldsymbol{e} \in T^{\uparrow}$ かつ $\langle \boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = -1$

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^S \in \boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) \text{ のとき}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathscr{C}^{\uparrow} \quad \Leftrightarrow \quad x = \| \boldsymbol{x}^S \|_S > 0$$

証明 $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = -x$ であって，

$$\boldsymbol{x} \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \| \boldsymbol{x}^S \|_S \neq 0$$

$$x \in \mathscr{C}^{\uparrow} \quad \Leftrightarrow \quad 0 > \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e} \rangle_M = -x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$　（証明終）

注意　「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{C}^{\uparrow} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathscr{C}^{\uparrow}$」は真でない．たとえば $\boldsymbol{V}^4{}_M$ において，$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathscr{U}_U^{\uparrow}$ のとき，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_2$$

と置けば，$\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M = \langle \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = 0$ より $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{C}$ である．また $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_0 \in T^{\uparrow}$ に対し $\langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} \rangle_M = \langle \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = -1$ より $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{C}^{\uparrow}$ である．

しかしながら

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \quad \text{は} \quad \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle_M = 2\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle_M = -2 \neq 0$$

だから

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \notin \mathscr{C} \quad \text{当然} \quad \notin \mathscr{C}^{\uparrow}$$

定義（4.1.4）（i）$X \subseteqq \boldsymbol{M}$ が**光速度世界線**$\Leftrightarrow \exists$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$，$\exists C^{\infty}$ 級の写像 $X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{M}$

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$

(2)　$X_{(O,e)}'(x)$ が定値，$X_{(O,e)}' \in \mathscr{C}^{\uparrow}$

特に　$\langle X_{(O,e)}' \mid X_{(O,e)}' \rangle_M = 0$

(3)　$\forall x \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$，$\langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{OX_{(O,e)}(x)} \rangle_M = -x$」

と定義する．このとき，当然

$$\exists\, \boldsymbol{b}_{(O,e)}, \boldsymbol{c}_{(O,e)} \in V^S(\boldsymbol{e}), \qquad \|\boldsymbol{c}_{(O,e)}\|_S = 1$$

$$\boldsymbol{x}^S{}_{(O,e)}(x) = \boldsymbol{b}_{(O,e)} + x\boldsymbol{c}_{(O,e)}$$

の形であって，$\forall x \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$，

$$X_{(O,e)}'(x) = \boldsymbol{e} + \frac{d\boldsymbol{x}^S}{dx}(x) = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{c}_{(O,e)} \in \mathscr{C}^{\uparrow}$$

$$X_{(O,e)}(x) = O + x(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c}_{(O,e)}) + \boldsymbol{b}_{(O,e)}$$

が成り立つ．　（光速度世界線の定義終）

注意（4.1.5）　光速度世界線 X において，

（i）　写像

$$X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{R} \to X, \qquad x \mapsto X_{(O,e)}(x)$$

は全単射である．

実際，光速度世界線の条件(1)「$X = \mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$」より，全射は当然．また条件(3)

$$「\forall x \in \boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e}),\ \langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{OX_{(O,e)}(x)} \rangle_M = -x」$$

より単射なることも当然である．

$\mathscr{C} \cap T^{\uparrow} \subseteqq \mathscr{C} \cap T = \emptyset$ だから，当然 $X_{(O,e)}{}'(x) \notin T^{\uparrow}$ である．すなわち X は劣光速世界線でない．

（ii）　光速度世界線 X の固有時刻は定義しない，これを強いて定義すれば，

$$\xi = \int_0^x \sqrt{-\langle X_{(O,e)}{}'(x) \mid X_{(O,e)}{}'(x) \rangle_M}\, dx = \int_0^x 0\, dx = 0$$

となってしまう．したがってまた，光速度世界線 X の時空速度も定義できないし，固有時刻表示 (2.4.2) (2.4.3) も持たない．次の命題は，劣光速世界線の場合 (2.3.4) と同様に，物理的には多分明白なことであろう．

命題（4.1.6）　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}_M)$ において，部分集合 $X \subseteqq \boldsymbol{M}$ について，次の I と II は同値である．

I．X が光速度世界線である

II．$\forall (P, \boldsymbol{f}) \in \boldsymbol{M} \times T^{\uparrow}_U$，$\exists_1 C^\infty$ 級の写像 $X_{(P,f)} : \boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{f}) \to \boldsymbol{M}$

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_{(P,f)}$

(2)　$X_{(P,f)}{}'(y)$ は定値であって，$X_{(P,f)}{}' \in \mathscr{C}^{\uparrow}$

(3)　$\forall y \in \boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{f})$，$\langle \boldsymbol{f} \mid \overrightarrow{PX_{(P,f)}(y)} \rangle_M = -y$」

言い換えれば，光速度世界線は任意の慣性系において慣性時刻表示をもつ．

証明　（II ⇒ I）は当然．

（I ⇒ II）仮定により，$\exists (O, \boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{M} \times T^{\uparrow}_U$，$\exists\, C^\infty$ 級の写像 $X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{M}$

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$

(2)　$X_{(O,e)}{}'(x)$ は定値であって，$X_{(O,e)}{}' \in \mathscr{C}^{\uparrow}$

(3)　$\forall x \in \boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e})$，$\langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{OX_{(O,e)}(x)} \rangle_M = -x$」

が成り立つ．$(P, \boldsymbol{f})$ を定めたとき，写像

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)} : \boldsymbol{E}^{T}_{O}(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}^{T}_{P}(\boldsymbol{f})$$

を

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(x) = -\langle \boldsymbol{f} \mid \overrightarrow{PX_{(O,e)}(x)} \rangle_M$$

すなわち

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(x)=y \quad \Leftrightarrow$$
$$X_{(O,e)}(x)=P+y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{y}^S, \qquad \exists\, \boldsymbol{y}^S \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f})$$

で定義する．写像 $\iota_X=\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}: \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})$ は

（i）　<u>C^∞ 級，特に連続</u>である．

（ii）　<u>$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}{}'(x)=\alpha>0$　(定数)</u>

この事実の証明は次の補題 (4.1.7) で行うこととして，しばらくこれを仮定する．これより写像

$$\iota_X : \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})$$

は真に増加，したがって単射であり，しかも全射である (2.3.5)．当然 ι_X の逆写像 $\iota_X{}^{-1}$ が存在してやはり（i），（ii）を満たす．

$X_{(P,f)} := X_{(O,e)} \circ \iota_X{}^{-1}$ と置く．このとき

「(1)　$\mathrm{Im}\, X_{(P,f)}=X_{(O,e)}(\iota_X{}^{-1}(\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})))$
$$=X_{(O,e)}(\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}))=X$$

(2)　$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}))=\boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})$ より
$$\forall\, y \in \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f}), \quad \exists\, x \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}), \quad y=y(x)=\iota_X(x)$$

$X_{(O,e)}{}'$ は定値，$\iota_X{}'(x)=\dfrac{dy}{dx}>0$ も定数，したがって $(\iota_X{}^{-1})'(y)=\dfrac{dx}{dy}>0$ も定数であるから，

$$X_{(P,f)}{}'(y)=X_{(O,e)}{}'(\iota_X{}^{-1}(y))x'(y)$$

は定値で，

$$=X_{(O,e)}{}'\frac{dx}{dy} \in \mathscr{C}^{\uparrow}$$

(3)　$\forall\, y \in \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{R}$，$\exists\, x \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{R}$，$X_{(P,f)}(y)=X_{(O,e)}(x) \in P+y\boldsymbol{f}+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{f})$

$$\therefore \quad \langle \boldsymbol{f} \mid \overrightarrow{PX_{(P,f)}(y)} \rangle_M=-y」$$　(定理の証明終)

補題 (4.1.7)　$\forall$ 光速度世界線 X，$\forall$ 慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$，$(P,\boldsymbol{f})$ について，写像

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}=X_{(P,f)}{}^{-1} \circ X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}_P^T(\boldsymbol{f}), \quad x \mapsto y$$

の微分係数は

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}{}'(x)=\frac{dy}{dx}$$

$$=-\langle X_{(O,e)}' \mid \boldsymbol{f}\rangle_M =: \alpha > 0 \quad (定値)$$
$$=\frac{-1}{\langle X_{(P,f)}' \mid \boldsymbol{e}\rangle_M}$$

証明　(i)　$X_{(P,f)}(y)=P+y(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{b}_{(P,f)})+\boldsymbol{y}^S{}_{(P,f)}(0)$
$X_{(O,e)}(x)=O+x(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)})+\boldsymbol{x}^S{}_{(O,e)}(0)$

とする．

$$\therefore \quad X_{(P,f)}'(y)=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{b}_{(P,f)}$$
$$X_{(O,e)}'(x)=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)} \quad (定値)$$

$y=\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(P,f)}(x)$ のとき，

$$X_{(P,f)}(y)=X_{(O,e)}(x),$$

両辺を x について微分して，

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{b}_{(P,f)})\frac{dy}{dx}=X_{(P,f)}'(y)\frac{dy}{dx}=X_{(O,e)}'(x)$$

を得る．両辺の $\boldsymbol{f}$ との内積をとれば，

$$-\frac{dy}{dx}=\langle X_{(O,e)}' \mid \boldsymbol{f}\rangle_M \quad (定値) \qquad \cdots①$$

である．　(証明終)

定義（4.1.8）　光速度世界線と劣光速世界線とを総称して**一般世界線**という．したがって，$X\subseteqq \boldsymbol{M}$ が一般世界線 ⇔ ∃/∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$,
∃C^∞ 級の写像 $X_{(O,e)}:\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{M}$

(1)　$X=\mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$

(3)　$\forall \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$, $\langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{OX_{(O,e)}(x)}\rangle_M=-x$

(2)　「$\forall x\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$, $X_{(O,e)}'(x)\in T^{\uparrow}$」または
「$X_{(O,e)}'(x)$ は定値であって，$X_{(O,e)}'\in\mathscr{C}^{\uparrow}$」

が成り立つ．

注意　$\boldsymbol{M}$ を Minkowski 空間，$X\subseteqq\boldsymbol{M}$ を部分集合とする．全単射

$$X_{(O,e)}:\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{M}, \qquad x\mapsto O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$

があって，条件

(1)　$X=\mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$

(2)　$\forall x\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$, $X_{(O,e)}'(x)\in T^{\uparrow}\cup\mathscr{C}^{\uparrow}$

(3)　$\forall x\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$, $\langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{OX_{(O,e)}(x)}\rangle_M=-x$」

を満たすとする．このとき，

（i）　$\forall x, X_{(O,e)}'(x) \in T^{\uparrow}$　すなわち　X は劣光速世界線である

（ii）　$\forall x, X_{(O,e)}'(x) \in \mathscr{C}^{\uparrow}$ かつ $X_{(O,e)}'(x)$ が定値，すなわち X は光速度世界線である

（iii）　$\forall x, X_{(O,e)}'(x) \in \mathscr{C}^{\uparrow}$ かつ $X_{(O,e)}'(x)$ が定値でない，すなわち，X は光速度世界線でない

（iv）　$\exists x, X_{(O,e)}'(x) \in T^{\uparrow}$，$\exists y, X'(y) \in \mathscr{C}^{\uparrow}$

の 4 つの場合が考えられる．

注意　一般には X について，場合 (iv) が有り得ることを例により示そう．$(O, \boldsymbol{e})$ を Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ の慣性系，$\boldsymbol{e}_1 \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ を単位ベクトルとし写像

$$X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{M}, \qquad x \mapsto O + x\boldsymbol{e} + (\sin x)\boldsymbol{e}_1$$

を考える．$X_{(O,e)}'(x) = \boldsymbol{e} + (\cos x)\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{o}$

$$\therefore \quad \langle X_{(O,e)}'(x) \mid X_{(O,e)}'(x) \rangle_M = -1 + \cos^2 x \leqq 0$$

$$\therefore \quad X_{(O,e)}'(x) \in T^{\uparrow} \cup \mathscr{C}^{\uparrow}$$

よって $X = \mathrm{Im}\, X_{(O,e)}$ は条件 (1)(2)(3) を満たす．ところで $y = n\pi$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ のとき

$$\langle X_{(O,e)}'(y) \mid X_{(O,e)}'(y) \rangle_M = 0 \quad \text{かつ} \quad X_{(O,e)}'(y) = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{o}$$

$$\therefore \quad X_{(O,e)}'(y) \in \mathscr{C}^{\uparrow}$$

$x \neq n\pi$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ のとき

$$\langle X_{(O,e)}'(x) \mid X_{(O,e)}'(x) \rangle_M = -1 + \cos^2 x < 0$$

$$\therefore \quad X_{(O,e)}'(x) \in T^{\uparrow}$$

が成り立つ．すなわち，この X は場合 (iv) の例である．

補題 (4.1.9)　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において，$\forall$ 一般世界線 X，$\forall (O, \boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{M} \times T_U^{\uparrow}$，$\forall Q = X_{(O,e)}(q) \in X$ に対し，

（i）　$\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \cong \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) + q\boldsymbol{e} = \boldsymbol{E}_Q^T(\boldsymbol{e})$，　$O + x\boldsymbol{e} \leftrightarrow Q + (x+q)\boldsymbol{e}$

すなわち写像 ${\iota_X}^{(O,e)}{}_{(Q,e)} = {X_{(Q,e)}}^{-1} \circ X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}_Q^T(\boldsymbol{e})$ は

$${\iota_X}^{(O,e)}{}_{(Q,e)}(x) = x + q$$

であって

$$X_{(O,e)}(x) = X_{(Q,e)}(x+q)$$

が成り立つ．特に

（ii）　$Q := X_{(O,e)}(0) = O + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(0) \in X$ の場合には

$$\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{E}_Q^T(\boldsymbol{e}), \qquad O + x\boldsymbol{e} \leftrightarrow Q + x\boldsymbol{e}$$

と同一視されて，すなわち

$$\iota_X{}^{(O,e)}{}_{(Q,e)} = X_{(Q,e)}{}^{-1} \circ X_{(O,e)} : \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \to \boldsymbol{E}_Q^T(\boldsymbol{e})$$

は恒等写像と考えられて，

$$X_{(Q,e)}(x) = X_{(O,e)}(x)$$

が成り立つ．

証明　劣光速世界線の場合には既に述べたから (2.3.9)，X は光速度世界線としてよい．

$$X_{(O,e)}(x) = O + x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$

とする．

（i）　$$\overrightarrow{OQ} = -q\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(q)$$

に注意する．

$$\begin{aligned} X_{(Q,e)}(x) &:= X_{(O,e)}(x-q) && \cdots① \\ &= O + (x-q)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x-q) \\ &= (O - q\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(q)) \\ &\quad + (x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(x-q) - \boldsymbol{x}_{(O,e)}(q)) \\ &= Q + x\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x-q) - \boldsymbol{x}_{(O,e)}(q)) && \cdots② \end{aligned}$$

と置けば，この $X_{(Q,e)}(x)$ は確かに求めるものである．実際，

「(1)　$X = \mathrm{Im}\, X_{(Q,e)}$　（①による）

(2)　$X_{(Q,e)}'(x) = X_{(O,e)}'(x-q)$

は定値であって，$X_{(Q,e)}' \in \mathscr{C}^{\uparrow}$　（①による）

(3)　等式②により，

$\forall x \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}),\ \langle \boldsymbol{e} \mid \overrightarrow{QX_{(Q,e)}(x)} \rangle_M = -x$」

が成り立つ．

（ii）　$Q := X_{(O,e)}(0) \in X$ に対しては，（i）で $q=0$ と置け．このとき

$$X_{(Q,e)}(x) = X_{(O,e)}(x)$$

であって，$O + x\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})$ と $Q + x\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}_Q^T(\boldsymbol{e})$ とが対応する．　　　（証明終）

§ 4.1 の練習問題

問題 1.　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ において，写像

$$C_{(O,e)}:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{M},\ \ x\to C_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)}(x),$$

$$\boldsymbol{c}_{(O,e)}(x)=(\cos x)\boldsymbol{e}_1+(\sin x)\boldsymbol{e}_2$$

を考える．ただし $(O,\boldsymbol{e})$ は慣性系であって，$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\in\mathcal{U}_+^\uparrow$ とする．このとき $C=\mathrm{Im}\ C_{(O,e)}$ は光速度世界線ではないが

$$\forall x\in\boldsymbol{R},\ \ C_{(O,e)}'(x)\in\mathcal{C}^\uparrow,\ \ \|\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)\|_S=1$$

を満たすことを示せ．

問題 2.　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}^{(n,1)}$ が共に光ベクトルであって，$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ ならば，

$$\exists a\in\boldsymbol{R},\qquad \boldsymbol{y}=a\boldsymbol{x}$$

問題 3.　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{V}_M)$ において，ヨ 慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ で定義される写像 $\Gamma:\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})\to\boldsymbol{M}$

$$\Gamma(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)$$

について，

「$\forall x<x',\ \ \overrightarrow{\Gamma(x)\Gamma(x')}\in\mathcal{C}^\uparrow$」

ならば，

$$\forall x_0\in\boldsymbol{R},\ \ \Gamma'(x_0)\in\mathcal{C}^\uparrow$$

である．

答

1.
$$\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)=-(\sin x)\boldsymbol{e}_1+(\cos x)\boldsymbol{e}_2,\qquad \|\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)\|_S=1,$$

$$\langle C_{(O,e)}'(x)\mid C_{(O,e)}'(x)\rangle_M=-1+\|\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)\|_S{}^2=0$$

$$\therefore\quad C_{(O,e)}'(x)\in\mathcal{C}$$

である．さらに $C_{(O,e)}'(x)=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)\sim\boldsymbol{e}$ より，

$$C_{(O,e)}'(x)\in\mathcal{C}$$

である (4.1.3)．しかしながら，

$$\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)=-(\sin x)\boldsymbol{e}_1+(\cos x)\boldsymbol{e}_2$$

は定値ではなく，$C=\mathrm{Im}\ C_{(O,e)}$ は光速度世界線ではない．

2.　$\boldsymbol{e}\in T_U^\uparrow$ を定め，$\boldsymbol{e}$ による Minkowski 分解 $\boldsymbol{V}_M=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ において

$$\exists\xi,\eta\in\boldsymbol{R},\ \ \xi\eta\neq0,\ \ \boldsymbol{x}=\xi(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^S),\ \ \boldsymbol{y}=\eta(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{y}^S)$$

$$\therefore\quad 0=\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle_M=\xi^2(-1+\|\boldsymbol{x}^S\|_S{}^2)\ \text{より}\ \|\boldsymbol{x}^S\|_S=1$$

$$0=\langle\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}\rangle_M=\eta^2(-1+\|\boldsymbol{y}^S\|_S{}^2)\ \text{より}\ \|\boldsymbol{y}^S\|_S=1$$

$$0=\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle_M=\xi\eta(-1+\langle \boldsymbol{x}^s \mid \boldsymbol{y}^s\rangle_S)\ \text{より}\ 1=\langle \boldsymbol{x}^s \mid \boldsymbol{y}^s\rangle_S$$

$$1=\langle \boldsymbol{x}^s \mid \boldsymbol{y}^s\rangle_S \leqq \|\boldsymbol{x}^s\|_S \cdot \|\boldsymbol{y}^s\|_S=1\cdot 1=1$$

よって Euclid 空間 $\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ における Schwartz の不等式より，$x^S /\!/ y^S$ つまり

$$\exists a \in \boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{y}=a\boldsymbol{x}$$

3.　$x_0<x$ に対し

$$\mathscr{C}^{\uparrow} \ni \overrightarrow{\Gamma(x_0)\Gamma(x)}=(x-x_0)\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)-\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x_0)) \qquad \cdots①$$

$$\frac{\overrightarrow{\Gamma(x_0)\Gamma(x)}}{x-x_0}=\boldsymbol{e}+\frac{\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)-\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x_0)}{x-x_0}$$

そこで $x\to x_0$ とすれば

$$\Gamma'(x_0)=\boldsymbol{e}+\frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dx}(x_0)\neq \boldsymbol{o} \qquad \cdots①$$

である．一方

$$\langle \Gamma'(x_0) \mid \Gamma'(x_0)\rangle_M=\lim\left\langle \frac{\overrightarrow{\Gamma(x_0)\Gamma(x)}}{x-x_0} \,\middle|\, \frac{\overrightarrow{\Gamma(x_0)\Gamma(x)}}{x-x_0}\right\rangle_M=0 \qquad \cdots②$$

①②より

$$\Gamma'(x_0)\in \mathscr{C}^{\uparrow}$$

を得る．

§4.2　特殊相対性の仮説，光の速度不変の仮説

Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{V}^{(n,1)})$ において慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ を任意に定めておく．

復習（4.2.1）（i）　劣光速の世界線

$$X_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)\in \boldsymbol{M}$$

に対し (2.5.1)，

$$\frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dx}(x)\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

を慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ における X の**速度**，X の**空間速度**，**慣性速度**等という．

（ii）　光速度世界線 $C_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)}(x)$ に対し (4.1.4)

$$\boldsymbol{c}_0^S:=\frac{d\boldsymbol{c}_{(O,e)}}{dx}(x)\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$$

を光速度世界線の $(O,\boldsymbol{e})$ における**速度**，**空間速度**，**慣性速度**等という．

（iii）　速度の大きさ $\|\boldsymbol{x}_{(O,e)}{}'(x)\|_S$，$\|\boldsymbol{c}_{(O,e)}{}'(x)\|_S\in \boldsymbol{R}$ を**速さ**という．光速度世界線は Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{V}^4{}_M)$ における直線である．特に光速度世界線 C の速さ（空間速度の大きさ）は，慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ の取り方によらず，常に 1 に

等しい．すなわち

$$\forall x \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}), \qquad \left\| \frac{d\boldsymbol{c}_{(O,e)}}{dx}(x) \right\|_S = 1$$

であるのみならず，空間速度自身が定値ベクトルである (4.1.4)．すなわち
∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ において $\exists \boldsymbol{c}_0^S \in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$,

$$\begin{aligned} C_{(O,e)}(x) &= O + x\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{c}_{(O,e)}(0) + x\boldsymbol{c}_0^S) \\ &= (O + \boldsymbol{c}_{(O,e)}(0)) + x(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c}_0^S) \end{aligned}$$

劣光速世界線 X の速さは，どんな慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ において考えても，光速度世界線の速さ 1 より小さい．すなわち

$$\forall x \in \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}), \qquad \left\| \frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dx}(x) \right\|_S < 1$$

が成り立つ (2.3.3)．

仮説 (4.2.2) （i）（**仮説 II：特殊相対性の仮説**）我々が住んでいる空間・時間には，Newton 宇宙のような絶対空間・絶対時間といったものはなく，空間と時刻空間とは，渾然一体となって，4 次元の Minkowski 空間 $(\boldsymbol{M}^4, \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ をなし，慣性系 $(O, \boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{M} \times T_U^{\downarrow}$ を定める毎に Newton 宇宙の構造

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{e}) = \bigcup_{x \in R}((O + x\boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{E}_O^S(\boldsymbol{e})), \\ \boldsymbol{V}^{(3,1)} &= \boldsymbol{Re} \oplus \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e}) = \bigcup_{x \in R}(x\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})) \end{aligned}$$

が定まる．そして，これらの慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ はどれも対等であって，他の慣性系と区別されるべき特別の慣性系はない．このことを**特殊相対性原理**という．

以下，物理空間をこのように $(\boldsymbol{M}^4, \boldsymbol{V}_M)$ と見たとき，これを **Einstein 空間**という（仮説 II 終）．

（ii）（**仮説 III：光の速度不変の仮説**）時間の単位 S＝秒 に対し，新しい時間の単位 M＝**メートル** を，定数

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \fallingdotseq 3 \times 10^8$$

を用いて

$$1\ \text{メートル} := 1/c\ \text{秒} \quad \text{すなわち} \quad 1\text{M} = (1/c)\text{S}$$

$$x\ \text{メートル} = t\ \text{秒} \quad \Leftrightarrow \quad x = ct$$

と定める．このとき電磁波 C の世界線は (4.1.4) の意味の光速度世界線である．すなわち ∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における時刻をメートルを用いて表し，

$$C_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)}(x)\in\boldsymbol{M}=\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})\times\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$$

とすれば，C の空間速度 $\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ は定値ベクトルであって，しかも

$$\|\boldsymbol{c}_{(O,e)}'(x)\|_S=1$$

が成り立つ．言い換えれば，どの慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ で見ても電磁波は常に直進しその速さは常に1である．このことを**光の速度不変の原理**という．以下電磁波を**光**ともいう．

(iii)　質点 (X, m) の軌跡は (2.3.3) の意味の劣光速世界線である．すなわち，$\forall$ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ において時刻をメートルで表し

$$X_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x)\in\boldsymbol{M}$$

とすれば，X の空間速度 $\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\in\boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ の大きさは，光速度世界線の速さ1より常に小さい

$$\|\boldsymbol{x}_{(O,e)}'(x)\|_S<1$$

が成り立つ（仮説III終）．

記号と約束（4.2.3）　慣性系 $(O, \boldsymbol{e})\in\boldsymbol{M}\times T^{\uparrow}_U$ を定めたとき，t 秒を $x=ct$ のとき，x メートルと呼ぶことにすれば，

$$\|\boldsymbol{e}\|_T=1 \text{ メートル},\ \|c\boldsymbol{e}\|_T=c \text{ メートル}=1 \text{ 秒}$$

であって，

$$x\boldsymbol{e}=t(c\boldsymbol{e}) \text{ は}\quad x\text{メートル}=t\text{ 秒}\quad\text{の時間の間隔}$$

を表す．時間の全体 $V^T(\boldsymbol{e})$ はメートル単位で $V^T(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}$ と表しても，秒単位で $V^T(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{R}(c\boldsymbol{e})$ と表しても，全体としては，変わりはない．これに対して時刻空間 $\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ の方も

$$E^T_O(\boldsymbol{e})=O+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \quad\text{と}\quad E^T_O(\boldsymbol{e})=O+\boldsymbol{R}c\boldsymbol{e}$$

$$O+x\boldsymbol{e}\leftrightarrow O+tc\boldsymbol{e}$$

の2通りの表し方があるわけである．

記号と約束（4.2.4）　（i）　時間の単位をM＝メートルの代りに S＝秒にとれば，これまで考えた時刻空間 $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}, V^T(\boldsymbol{e}))$ は $(\boldsymbol{R}(c\boldsymbol{e}), V^T(\boldsymbol{e}))$ と考えてよい．

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{R}(c\boldsymbol{e})$$

$$x\boldsymbol{e}\leftrightarrow t(c\boldsymbol{e})\qquad (x=ct \text{ による})$$

$$E^T_O(\boldsymbol{e})=O+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}=O+\boldsymbol{R}(c\boldsymbol{e})$$
$$O+x\boldsymbol{e}\leftrightarrow O+t(c\boldsymbol{e})$$

である．

（ii）　$X_{(O,\boldsymbol{e})}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(x)$ を慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ における，一般世界線 X の，時間の単位としてメートルを用いた慣性時刻標示とする．ここで $x=ct$ と置けば，X の時刻として秒を用いた慣性時刻標示を得る．

$$X_{(O,\boldsymbol{e})}(ct)=O+ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(ct)$$

今後はこれを

$$\begin{aligned}X_{(O,c\boldsymbol{e})}(t)&=O+t(c\boldsymbol{e})+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(ct)\\&=O+t(c\boldsymbol{e})+\boldsymbol{y}_{(O,\boldsymbol{e})}(t)\end{aligned}$$
$$\boldsymbol{y}_{(O,\boldsymbol{e})}(t):=\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(ct)$$

のように書き表す．したがって $X_{(O,\boldsymbol{e})}{}'(x)=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}{}'(x)$ のとき

$$X_{(O,c\boldsymbol{e})}{}'(t)=c(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}{}'(ct))=cX_{(O,\boldsymbol{e})}{}'(x)$$

である．

仮説（4.2.5）（仮説Ⅰ：同じ時計と同じ物差の仮説）（i）　1つの時計は，任意に定めた慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ において，静止しているとき，常に同じ基本周期をもつ．このことによって，任意の2つの慣性系における時間を比較することができる（Weyl［17］§23，内山訳258頁）．

（ii）　1つの物差は，任意に定めた慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ において，静止しているとき，常に同じ長さをもつ．このことによって，任意の2つの慣性系における距離を比較することができる（前原［13］p. 107，Weyl［17］§23，内山訳256頁）．

約束　これからは特に断らなければ，時間の単位を $S=$秒 にとることにする．

命題（4.2.6）　二つの事象 $A,B\in\boldsymbol{M}$ がある．$\forall$ 慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ において

$$A=A_{(O,c\boldsymbol{e})}(a)=O+a(c\boldsymbol{e})+\boldsymbol{a}_{(O,\boldsymbol{e})},$$
$$B=B_{(O,c\boldsymbol{e})}(b)=O+b(c\boldsymbol{e})+\boldsymbol{b}_{(O,\boldsymbol{e})}$$

（i）　時空位置 $A=A_{(O,c\boldsymbol{e})}(a)$ から出た光 C が時空位置 $B=B_{(O,c\boldsymbol{e})}(b)$ に到達したとする．すなわち慣性時刻 $a(c\boldsymbol{e})$ に空間位置 $O+\boldsymbol{a}^S$ から，出た光 $C_{(O,c\boldsymbol{e})}(t)$ が慣性時刻 $b(c\boldsymbol{e})$ に空間位置 $O+\boldsymbol{b}^S$ に到達したとする．このとき

$$b=a+\frac{\|\boldsymbol{b}_{(O,e)}-\boldsymbol{a}_{(O,e)}\|_S}{c}$$

が成り立つ（Einstein による時計の時刻のあわせ方）．

（ii）　事象 A と B とが同時刻ということは慣性系に依存する．

証明　（i）　光 C の慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ における表示を

$$C_{(O,ce)}(t)=O+t(c\boldsymbol{e})+\boldsymbol{c}_0(t)$$

とする．$C_{(O,ce)}(t_1)=A$，$C_{(O,ce)}(t_2)=B$ とする．$t_1<t_2$ より，

$$\overrightarrow{C_{(O,ce)}(t_1)C_{(O,ce)}(t_2)}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(cb-ca)\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{b}_{(O,e)}-\boldsymbol{a}_{(O,e)})$$

は未来光ベクトルである．

$$\overrightarrow{AB}\in\mathscr{C}^{\uparrow},\qquad \therefore\quad b-a=\|\boldsymbol{b}_{(O,e)}-\boldsymbol{a}_{(O,e)}\|_S$$

（光が $O+\boldsymbol{a}_{(O,e)}$ から $O+\boldsymbol{b}_{(O,e)}$ に到達するに要する時間）

$$=\frac{\|\boldsymbol{b}_{(O,e)}-\boldsymbol{a}_{(O,e)}\|_S}{c}=b-a$$

$$b=a+(b-a)=a+\frac{\|\boldsymbol{b}_{(O,e)}-\boldsymbol{a}_{(O,e)}\|_S}{c}$$

（ii）　$(O,\boldsymbol{f})$ をもう一つの慣性系，$(\theta,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{f}_1)\in\Gamma_e(\boldsymbol{f})$

$$W=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1$$
$$(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\in\mathscr{U}_{W\perp}$$
$$\therefore\quad(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}_1)H(\theta)$$

とする．このとき，$(O,\boldsymbol{e})$ において

$$A=O+a(c\boldsymbol{e})+\boldsymbol{a}_{(O,e)}=O+a(c\boldsymbol{e})+a_1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$$
$$B=O+b(c\boldsymbol{f})+\boldsymbol{b}_{(O,e)}=O+b(c\boldsymbol{e})+b_1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{a}_{(O,e)}=a_1\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{b}_{(O,e)}=b_1\boldsymbol{e}_1$$

$(O,\boldsymbol{f})$ において

$$A=O+a'(c\boldsymbol{f})+a'_1\boldsymbol{f}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$$
$$B=O+b'(c\boldsymbol{f})+b'_1\boldsymbol{f}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$$

とすれば，

$$\begin{bmatrix}ca'\\a'_1\end{bmatrix}=H(\theta)\begin{bmatrix}ca\\a_1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}cb'\\b'_1\end{bmatrix}=H(\theta)\begin{bmatrix}cb\\b_1\end{bmatrix}$$
$$ca'=(\operatorname{csh}\theta)ca+(-\operatorname{snh}\theta)a_1$$

$$a_1'=(-\mathrm{snh}\ \theta)ca+(\mathrm{csh}\ \theta)a_1$$

となる $a_2=b_2=a_3=b_3=0$ (3.2.14).

$$\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{f} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tgh}\ \theta\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \theta\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{snh}\ \theta\neq 0$$

なることに注意しよう．

$$\begin{aligned} c(b'-a')&=(\mathrm{csh}\ \theta)cb+(-\mathrm{snh}\ \theta)b_1 \\ &\quad -\{(\mathrm{csh}\ \theta)ca+(-\mathrm{snh}\ \theta)a_1\} \\ &=(\mathrm{csh}\ \theta)c(b-a)+(-\mathrm{snh}\ \theta)(b_1-a_1) \end{aligned}$$

であるから，$a=b$ であっても，$\boldsymbol{a}_{(O,e)}\neq\boldsymbol{b}_{(O,e)}$ ならば $a_1\neq b_1$

$$c(b'-a')=(-\mathrm{snh}\ \theta)(b_1-a_1)\neq 0$$

$$a'\neq b'$$

である．　(証明終)

メートル単位で言えば，電磁場の速さは常に1であって，質点の速さは常に光速1を越えない．すなわち

命題 (4.2.7)　メートル単位で言えば，∀ 慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ において，電磁場の速さは常に c であって，質点の速さは常に光速 c を越えない．

(i)　電磁波 C の世界線は $t(c\boldsymbol{e})=x\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}_O^T(\boldsymbol{e})$ に対し

$$\begin{aligned} C_{(O,e)}(x)&=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)}(x) \\ &=C_{(O,e)}(t)=O+ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}_{(O,e)}(ct) \end{aligned}$$

の形であって，その速さは $c=3\times 10^8$ [M/S]

$$=3\times 10^5\ [\mathrm{km/S}]=30\text{万}\ [\mathrm{km/S}]$$

である．

(ii)　質点 (X, m) の世界線は

$$\begin{aligned} X_{(O,e)}(x)&=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(x) \\ &=X_{(O,ce)}(t)=O+ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(ct) \end{aligned}$$

の形であって，速さは c より小さい．

注意　電磁波が光速で直進するのは，空間 $\boldsymbol{M}$ そのものの性質によるものである．空間 $\boldsymbol{M}$ には絶対運動というものはなく，相対運動のみがある．相対運動をしている2人の観測者 $(O,\boldsymbol{e})$，$(P,\boldsymbol{f})$ があるとき，O と P の $\boldsymbol{M}$ に対する関係は同等である．同等な2人が空間 $\boldsymbol{M}$ 内を伝播して来る1つの電磁波を観測するとき

$$C_{(O,ce)}(t)=O+ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}^S{}_{(O,e)}(t)$$
$$C_{(P,cf)}(s)=O+cs\boldsymbol{f}+\boldsymbol{c}^S{}_{(P,f)}(s)$$

どちらから見ても速さ $c=\|\boldsymbol{c}_{(O,e)}{}'(t)\|_S=\|\boldsymbol{c}_{(P,f)}{}'(s)\|_S$ で直進すると見えるのである.

命題（4.2.8）（$\boldsymbol{M}^4$, $\boldsymbol{V}_M$）を Einstein 空間, X を $\boldsymbol{M}$ の劣光速世界線, 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における X の時刻を x メートル$=t$ 秒

$$X_{(O,ce)}(t)=O+ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}(t)$$
$$X_{(O,e)}(x)=O+x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{y}_{(O,e)}(x)$$

とする. このとき

$$q_{(O,e)}(t):=\left\|\frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dt}(t)\right\|_S=c\left\|\frac{d\boldsymbol{y}_{(O,e)}}{dx}(x)\right\|_S$$

$$\beta_{(O,e)}(t):=\frac{q_{(O,e)}(t)}{c}=\left\|\frac{d\boldsymbol{y}_{(O,e)}}{dx}(x)\right\|_S=\beta_{(O,e)}(x)<1 \qquad \cdots①$$

$$X_{(O,e)}{}'(t)=c\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,e)}{}'(t)$$

$$\|X_{(O,e)}{}'(t)\|_T=c\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}$$

$$\gamma_{(O,e)}(t):=\frac{c}{\|X_{(O,e)}{}'(t)\|_T}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}}$$
$$=\gamma_{(O,e)}(x)\geqq 1$$

$$T_{(O,e)}(t):=\frac{1}{c}\int_0^t\|X_{(O,e)}{}'(t)\|_T dt$$
$$=\int_0^t\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}\,dt$$

と置く. $Q=X_{(O,e)}(0)\in X$ を基準とする X の固有時刻

$$\xi_Q \text{ メートル}=\tau_Q \text{ 秒}, \qquad \xi_Q=c\tau_Q$$

とする. このとき,

（i）
$$T_{(Q,e)}(t)=T_{(O,e)}(t)$$

（ii）
$$\frac{dt}{d\tau_Q}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}}=\gamma_{(O,e)}(t) \qquad \cdots②$$

（iii）
$$\tau_Q=\frac{1}{c}\int_0^t\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}\,dt,$$
$$\tau_Q=T_{(Q,e)}(t)=T_{(O,e)}(t)$$

証明　（i）
$$X_{(Q,e)}(t)=X_{(O,e)}(t)$$

であるから (2. 3. 10)，

$$X_{(Q,e)}'(t)=X_{(O,e)}'(t), \qquad \beta_{(Q,e)}(t)=\beta_{(O,e)}(t)$$

$$T_{(Q,e)}(t)=T_{(O,e)}(t)$$

(ii)

$$X_{(O,e)}'(t)=c\boldsymbol{e}+\frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dt}(t)$$

$$\|X_{(O,e)}'(t)\|_T=c\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}=\|X_{(O,e)}'(x)\|_T$$

$$\frac{dt}{d\tau_Q}=\frac{dx}{d\xi_Q}=\frac{1}{\sqrt{1-\left\|\dfrac{d\boldsymbol{y}_{(O,e)}}{dx}(x)\right\|_S^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}}$$

$$\frac{d\tau_Q}{dt}=\frac{d\xi_Q}{dx}=\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}$$

(iii)

$$\frac{d\tau_Q}{dt}=\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}$$

①, ②より

$$\tau_Q=\frac{1}{c}\int_0^t\sqrt{1-\beta_{(Q,e)}(t)^2}\,dt=T_{(Q,e)}(t)$$

$$\tau_Q=T_{(O,e)}(t)$$

(証明終)

定義 (4. 2. 9)　事象 $A, B\in\boldsymbol{M}$ に対し

(i)　A と B は時間的な関係にある　⇔　$\exists\boldsymbol{x}\in T$，$B=A+\boldsymbol{x}$

⇔　$\overrightarrow{AB}$ が時間ベクトル

と定義した (2. 1. 11)．さらに

(ii)　A と B とは**光的な関係**にある　⇔　$\exists\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}$，$A=B+\boldsymbol{x}$

⇔　$\overrightarrow{AB}$ が光ベクトル

(iii)　A と B とは**空間的な関係**にある　⇔　$\overrightarrow{AB}$ が空間ベクトル

と定義する．

二つの位置 A, B を通る直線は $A+\boldsymbol{R}\overrightarrow{AB}$ と表されることに注意しよう．

命題 (4. 2. 10)　異なる事象 $A, B\in\boldsymbol{M}$ に対し

(i)　A と B とが時間的な関係にある

⇔　∃ 劣光速世界線 X，$X\ni A$，$X\ni B$

(ii)　A と B とは光的な関係にある

$\Leftrightarrow$　∃ 光速度世界線 C，$C \ni A$，$C \ni B$

(iii)　A と B とは空間的な関係にある

$\Leftrightarrow$　$X \ni A$，$X \ni B$ なる一般世界線 X は存在しない．

すなわち A と B とが時間的または光的な関係にある場合には，一般世界線を用いて A から B へまたは B から A へ情報を送ることができる．A と B とが空間的な関係にあるときにはそういうことはできない．そこで A と B とが時間的または光的な関係にあることを，A と B とは**因果関係**にあるという．

証明　∀ 慣性系 $(A, \boldsymbol{e})$ を定め，

$$\overrightarrow{AB} = cb\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}_{(A,e)}$$

とおく．∴　$\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AB} \rangle_M = -(cb)^2 + \|\boldsymbol{b}_{(A,e)}\|_S{}^2$

(i), (ii)　A と B とが時間的または光的な関係にあるとき：

$$\frac{\boldsymbol{b}_{(A,e)}}{cb} = \boldsymbol{v}_{(A,e)}$$

とおく．そのとき $\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AB} \rangle_M \leqq 0$ より，

$$\|\boldsymbol{b}_{(A,e)}\|_S \leqq |cb|, \qquad \|\boldsymbol{v}_{(A,e)}\|_S \leqq 1$$

であるから，

$$X_{(A,ce)}(t) := A + ct\boldsymbol{e} + ct\boldsymbol{v}_{(A,e)} = A + tc(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{v}_{(A,e)})$$

とおけば，$X_{(o,e)}(t)$ は一般世界線を表し，

$$X_{(A,ce)}(0) = A, \qquad X_{(A,ce)}(b) = A + cb\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}_{(A,e)} = B$$

(iii)　A と B とは空間的な関係にあるとき：AB は空間ベクトルだから，

$$\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AB} \rangle_M > 0 \qquad \cdots①$$

である．仮に ∃ 一般世界線 X，

$$X \ni A = X_{(o,ce)}(a), \qquad X \ni B = X_{(o,ce)}(b)$$

とする．

$$\frac{dX_{(o,ce)}}{dt}(t) \in T^{\uparrow} \cup \mathscr{C}^{\uparrow},$$

∴　$0 < b$ に対し，

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{X_{(o,ce)}(a) X_{(o,ce)}(b)} = \int_a^b \frac{dX_{(o,ce)}}{dt}(t)\,dt \in T^{\uparrow} \cup \mathscr{C}^{\uparrow}$$

であるから

$$\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AB} \rangle_M \leqq 0$$

が成り立つ．これは①と矛盾する． (証明終)

§ 4.3 Lorentz による長さの収縮と時間の伸び

Einstein 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ において，時空位置 A, B を両端とする線分 AB の ∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ における長さを定義しよう．

定義 (4.3.1) 両端が A, B の棒がある．A, B 両者に共通の静止系が存在する時，それを棒 AB の**静止系**という．

(i) AB の**固有の長さ** l_0 とは，その静止系において測った長さのことをいう．$(O, \boldsymbol{f})$ を棒 AB の静止系とし，AB は直線 $O+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1 \subseteqq \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{f}) = O + V^S(\boldsymbol{f})$ 上にあるとする，$\|\boldsymbol{f}_1\|_S = 1$．したがって，∃ 定数 $a, b \in \boldsymbol{R}$

$$\forall s \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{f}), \quad A_{(O,c\boldsymbol{f})}(s) = O + cs\boldsymbol{f} + a\boldsymbol{f}_1,$$
$$B_{(O,c\boldsymbol{f})}(s) = O + cs\boldsymbol{f} + b\boldsymbol{f}_1$$

と表される．このとき，時刻 $s \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{f})$ の如何にかかわらず

$$l_0 = \|\overrightarrow{A(s)B(s)}\|_S = \|b\boldsymbol{f}_1 - a\boldsymbol{f}_1\|_S = |b-a|$$

であって，この値が棒 AB の固有の長さである．

(ii) ∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$,

$$\forall t \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e}), \quad A_{(O,c\boldsymbol{e})}(t) = O + ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{a}^S(t),$$
$$B_{(O,c\boldsymbol{e})}(t) = O + ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}^S(t)$$

のとき，

$$l_e(t) := \|\overrightarrow{A_{(O,c\boldsymbol{e})}(t)B_{(O,c\boldsymbol{e})}(t)}\|_S$$
$$= \|\boldsymbol{b}^S(t) - \boldsymbol{a}^S(t)\|_S$$

を時刻 $t \in \boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{e})$ における AB の**長さ**という．

命題 (4.3.2) (**長さの Lorentz 収縮**) 両端が A, B の棒がある．$(O, \boldsymbol{f})$ を棒 AB の静止系とし，AB は直線 $O+\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_1 \subseteqq \boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{f}) = O + V^S(\boldsymbol{f})$ 上にあるとする．∀ 慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$,

$$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f}), \qquad T = \mathrm{tgh}\,\theta,$$

したがって $(O, \boldsymbol{f})$ は $(O, \boldsymbol{e})$ から見て定速度 $cT\boldsymbol{e}_1$ で移動するとする (3.4.7)．このとき慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ からこの棒を見ると，

(イ) 棒の向きは $\boldsymbol{e}_1$ に平行に

(ロ)　棒の長さ $l_e(t)$ は

$$l_0 = l_e(t)\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1) = l_e(t)\operatorname{csh}\theta \geqq l_e(t)$$

$$l_e(t) = l_0\sqrt{1-\beta_{(0,e)}(t)^2} \leqq l_0$$

に見える．この事実を長さの **Lorentz-Fitzgerald 収縮**という．

証明　$\boldsymbol{Re}+\boldsymbol{Rf}=\boldsymbol{Re}+\boldsymbol{Re}_1=\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Rf}_1$ に注意する．∃ 定数 $a, b \in \boldsymbol{R}$

$$\forall s \in \boldsymbol{E}_0^T(\boldsymbol{f}), \quad A_{(0,cf)}(s) = O + cs\boldsymbol{f} + a\boldsymbol{f}_1,$$
$$B_{(0,cf)}(s) = O + cs\boldsymbol{f} + b\boldsymbol{f}_1$$

と表される．$s_A = \iota_A{}^{(O,e)}{}_{(0,f)}(t)$，$s_B = \iota_B{}^{(O,e)}{}_{(0,f)}(t)$

$$A_{(0,ce)}(t) = O + ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{a}^S(t) = O + ct\boldsymbol{e} + x_1(A)\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{a}^S(t) = x_1(A)\boldsymbol{e}_1$$

とすれば，(3. 4. 5) より

$$\begin{bmatrix} cs_A \\ a \end{bmatrix} = B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \theta)\begin{bmatrix} ct \\ x_1(A) \end{bmatrix} = H(\theta)\begin{bmatrix} ct \\ x_1(A) \end{bmatrix}$$

$$cs_A = (\operatorname{csh}\theta)ct + (-\operatorname{snh}\theta)x_1(A)$$

$$a = (-\operatorname{snh}\theta)ct + (\operatorname{csh}\theta)x_1(A) = \frac{-Tct + x_1(A)}{\sqrt{1-T^2}}$$

$$a = y_1 = \frac{-Tct + x_1(A)}{\sqrt{1-T^2}},$$

同様に，$s_B = \iota_B{}^{(O,e)}{}_{(0,f)}(t)$

$$B_{(0,ce)}(t) = O + ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}^S(t) = O + ct\boldsymbol{e} + x_1(B)\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{b}^S(t) = x_1(B)\boldsymbol{e}_1$$

と置けば，

$$b = y_1 = \frac{-Tct + x_1(B)}{\sqrt{1-T^2}}$$

を得る．

$$\overrightarrow{A_{(0,ce)}(t)B_{(0,ce)}(t)} = \boldsymbol{b}^S(t) - \boldsymbol{a}^S(t)$$
$$= (x_1(B) - x_1(A))\boldsymbol{e}_1$$

なる関係がある．

$$\therefore \quad l_e(t) = \|A_{(0,ce)}(t)B_{(0,ce)}(t)\|_S$$
$$= |x_1(B) - x_1(A)|$$

$$=|(Tct+b\sqrt{1-T^2})-(Tct+a\sqrt{1-T^2})|$$
$$=|b-a|\sqrt{1-T^2}=l_0\sqrt{1-T^2}$$
$$\therefore\quad l_e(t)=l_0\sqrt{1-T^2}\leqq l_0$$
$$l_0=l_e(t)\gamma_e(cT\boldsymbol{e}_1)$$
（証明終）

位置

$$O+ct\boldsymbol{e}=(ct,\boldsymbol{o}^S)\in ct\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{E}^S_O(\boldsymbol{e})$$

を慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ の時刻 $t\boldsymbol{e}$ における基準点または原点と呼んだ.

命題（4.3.3）（**Lorentz** による時間の伸び）事象 A を静止系 $(O,\boldsymbol{f})$ の原点とする. A の時空位置は世界線

$$X_{(O,c\boldsymbol{f})}(s)=O+cs\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{f})$$

で与えられる. $A\in\boldsymbol{E}^T_O(\boldsymbol{f})$ において $(O,\boldsymbol{f})$ の慣性時刻 s を用いて測った時間 s_2-s_1

$$X_{(O,c\boldsymbol{f})}(s_1)=O+cs_1\boldsymbol{f}$$
$$X_{(O,c\boldsymbol{f})}(s_2)=O+cs_2\boldsymbol{f}$$

と $\forall$ 慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ において $(O,\boldsymbol{f})$ の慣性時刻 t を用いて測った時間 t_2-t_1

$$X_{(O,c\boldsymbol{e})}(t_1)=O+ct_1\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(t_1)$$
$$X_{(O,c\boldsymbol{e})}(t_2)=O+ct_2\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(t_2)$$

を比較する.

$$X_{(O,c\boldsymbol{f})}(s_1)=X_{(O,\boldsymbol{e})}(t_1)$$
$$X_{(O,c\boldsymbol{f})}(s_2)=X_{(O,\boldsymbol{e})}(t_2)$$

$(O,\boldsymbol{f})$ は $(O,\boldsymbol{e})$ から見て定速度 $cT\boldsymbol{e}_1$ で移動するとする. このとき

$$t_2-t_1=\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1)(s_2-s_1)\geqq s_2-s_1$$
$$\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1)=\gamma_{(O,e)}(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(O,e)}(t)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-T^2}}$$
$$\beta_{(O,e)}(t)=\frac{1}{c}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}_{(O,e)}}{dt}(t)\right\|_S$$

に見える. この事実を **Lorentz** による時間の延長または遅延という.

証明　世界線

$$X_{(O,c\boldsymbol{e})}(t)=O+ct\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_{(O,\boldsymbol{e})}(t)$$

を考える. X は定速度だから慣性系 $(O,\boldsymbol{e})$ における慣性時刻 t と位置 A を基

準とする固有時刻 τ_A との間には

$$\exists\,\alpha\in R,\qquad ct=\gamma_{(O,e)}c\tau_A+\alpha \qquad \cdots①$$

なる関係がある (4.2.6)．特に静止系 $(O, \boldsymbol{f})$ における慣性時刻 s は X の固有時刻 τ_A と等しい．

$$s=\tau_A+\beta \qquad \cdots②$$

①と②より，

$$ct=\gamma_{(O,e)}cs+\delta$$

$$t_2-t_1=\gamma_{(O,e)}(s_2-s_1)\geqq s_2-s_1$$

一方，$(O, \boldsymbol{e})$ の原点位置 $A=X_{(O,cf)}(s)=O+cs\boldsymbol{f}$ は $(O, \boldsymbol{f})$ から見て定速度 $-T\boldsymbol{f}_1$ で移動するから，

$$\gamma_e(T\boldsymbol{e}_1)=\gamma_f(-T\boldsymbol{f}_1)=\gamma_{(O,\dot{e})}(t)$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

波の位相の不変性

定義 (4.3.4)　(i)　波動など周期的現象において，一周期内の進行段階を示す量を**位相**という．たとえば

$$y=\sin(\omega t+\delta)=\sin 2\pi(\nu t+\beta)$$

においては，$\omega t+\delta$ が位相である．$\nu t+\beta=(\omega t+\delta)/2\pi$ や $c(\nu t+\beta)=c(\omega t+\delta)/2\pi$ などをも**位相**という．

(ii)　慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ において，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ の向きに伝わる電波 W を考える．W は正弦波であって，

$$W(t, x\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{a}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T_{(O,e)}}-\frac{x}{\lambda_{(O,e)}}\right) \qquad \cdots①$$

$$=\boldsymbol{a}\cos(\omega_{(O,e)}t-k_{(O,e)}x) \qquad \cdots②$$

$$=\boldsymbol{a}\cos(2\pi\nu_{(O,e)}t-k_{(O,e)}x) \qquad \cdots③$$

と表される．ここに $\boldsymbol{a}\in V^S(\boldsymbol{e})$ は振動の向きを表す．$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{e}_1$ のとき，波動を**縦波**または**疎密波**という．$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}_1$ のとき**横波**という．電磁波は横波である．

$\lambda_{(O,e)}$＝**波長** :＝(W のグラフの相隣る山と山の間の距離)

$T_{(O,e)}$＝**周期** :＝

　　($\forall$ 点 $x\boldsymbol{e}_1\in \boldsymbol{V}^S(\boldsymbol{e})$ を定めたとき $x\boldsymbol{e}_1$ における W の増減の時間的周期)

$k_{(O,e)}=\dfrac{2\pi}{\lambda_{(O,e)}}=$(長さ 2π [M] 当たりの波の数) は**角波数**

$\omega_{(O,e)}=\dfrac{2\pi}{T_{(O,e)}}=$(時間 2π [S] 当たりの波の数) は**角振動数**

$\nu_{(O,e)}=\dfrac{1}{T_{(O,e)}}=\dfrac{\omega_{(O,e)}}{2\pi}=$(時間 1 [S] 当たりの波の数) は**振動数**

$h_{(O,e)}=\dfrac{1}{\lambda_{(O,e)}}=\dfrac{k_{(O,e)}}{2\pi}=$(長さ 1 [M] 当たりの波の数) は**波数**

である.

$$c:=\frac{\omega_{(O,e)}}{k_{(O,e)}}=\lambda_{(O,e)}\nu_{(O,e)}=\frac{\lambda_{(O,e)}}{T_{(O,e)}}$$

は波の**速さ**である.

$\because$) $W(t+\Delta t,(x+\Delta x)\boldsymbol{e}_1)=W(t,x\boldsymbol{e}_1)$ すなわち

$$\omega_{(O,e)}(t+\Delta t)-k_{(O,e)}(x+\Delta x)=\omega_{(O,e)}t-k_{(O,e)}x$$

とすれば,

$$\omega_{(O,e)}\Delta t-k_{(O,e)}\Delta x=0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\omega_{(O,e)}}{k_{(O,e)}},\qquad c=\frac{\omega_{(O,e)}}{k_{(O,e)}}=\frac{\nu_{(O,e)}}{h_{(O,e)}}$$

$\therefore$ 位相は

$$\frac{1}{2\pi}(\omega_{(O,e)}t-k_{(O,e)}x)=\nu_{(O,e)}t-h_{(O,e)}x=\nu_{(O,e)}\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

である. 上では, 振動方向が特別な $\boldsymbol{e}_1$ の場合を考えた. 一般には,

(iii) 方向 $\boldsymbol{k}_{(O,e)}\in V^S(\boldsymbol{e})$ に伝わる電波は

$$W(t,O+\boldsymbol{x}_{(O,e)})=\boldsymbol{a}\cos(\omega_{(O,e)}t-\langle\boldsymbol{k}_{(O,e)}\mid\boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_M)\qquad\cdots①$$

$$=\boldsymbol{a}\cos(2\pi\nu_{(O,e)}t-\langle\boldsymbol{k}_{(O,e)}\mid\boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_M)\qquad\cdots②$$

と表すことができる. ここに $\boldsymbol{a}$ は振動の方向を表す.

$\lambda_{(O,e)}=$**波長**,

$T_{(O,e)}=$**周期**

$:=(\forall$ 点 $\boldsymbol{x}_{(O,e)}\in V^S(\boldsymbol{e})$ を定めたとき

$\boldsymbol{x}_{(O,e)}$ における W の増減の時間的周期)

$$\boldsymbol{k}_{(O,e)}=k_{(O,e)}\boldsymbol{e}_{(O,e)}$$

は**角波数ベクトル**であって, 波の進む向きを表す.

$k_{(O,e)}$＝(長さ 2π [M] 当たりの波の数) は**角波数**

$\omega_{(O,e)}$＝(時間 2π [S] 当たりの波の数) は**角振動数**

$\nu_{(O,e)}=\dfrac{1}{T_{(O,e)}}=\dfrac{\omega_{(O,e)}}{2\pi}$＝(時間1 [S] 当たりの波の数) は**振動数**

$$c=\frac{\omega_{(O,e)}}{k_{(O,e)}}=\lambda_{(O,e)}\nu_{(O,e)}=\frac{\lambda_{(O,e)}}{T_{(O,e)}}$$

は波の**速さ**である．

$$\boldsymbol{e}_{(O,e)}=\frac{\boldsymbol{k}_{(O,e)}}{k_{(O,e)}}=(\text{波の進む向き})$$

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{k}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_M &= k_{(O,e)}\langle \boldsymbol{e}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_M \\ &= \frac{2\pi\nu_{(O,e)}}{c}\langle \boldsymbol{e}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_M\end{aligned}$$

を用いて，波の位相は

$$\frac{c}{2\pi}(\omega_{(O,e)}t-\langle \boldsymbol{k}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_M)=\nu_{(O,e)}(ct-\langle \boldsymbol{e}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_M)$$

である．$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{k}_{(O,e)}$ のときが**縦波**または**疎密波**，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{k}_{(O,e)}$ のときが**横波**である．

補題（4.3.5）　Einstein 空間 $(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ において，電磁波 W を考える．$\forall$ 慣性系 $(O,\ \boldsymbol{e})$ において，

$$W(t,\ O+\boldsymbol{x}_{(O,e)})=\boldsymbol{a}\cos(\omega_{(O,e)}t-\langle \boldsymbol{k}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_S)$$

とする．ここに $\boldsymbol{k}_{(O,e)}$ は波数ベクトルであって，波はこのベクトルの向き

$$\boldsymbol{e}_{(O,e)}:=\frac{\boldsymbol{k}_{(O,e)}}{\|\boldsymbol{k}_{(O,e)}\|_S}$$

に進む．$\lambda_{(O,e)}=\dfrac{c}{\nu_{(O,e)}}=Tc$ は波長．このとき

（i）　時刻 $t=0$ に原点Oを通過する波の山に印を付けたとする．位置 $O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}$ にいる観測者が，この印をつけた波が位置 $O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}$ を通過した瞬間から $O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}$ を通過する波の数を数え始めたとする．このとき，時刻 t 迄にこの観測者が数えあげた波の数が

$$(\text{位相})=\frac{\omega_{(O,e)}t-\langle \boldsymbol{k}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_S}{2\pi} \quad \cdots①$$

$$=\nu_{(O,e)}\left(t-\frac{l}{c}\right)\text{秒}$$

に等しい．ここに

$$l=\frac{\langle \boldsymbol{e}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_S}{c}$$

は原点 O から位置 $O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}$ を通る波面迄の距離である．

なぜなら；1秒間に到着する波の数が ν であり，一方目印を付けた波が位置 O から位置 $O+\boldsymbol{x}_{(O,e)}$ 迄進むのに l/c 秒かかるから，観測者が波を数えていた時間が

$$t-\frac{l}{c}\text{秒}$$

となるからである．

（ii）　位相 $\omega_{(O,e)}t-\langle \boldsymbol{k}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}\rangle_S$

は慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$ によらない．すなわち，任意の慣性系 $(P, \boldsymbol{f})$ において

$$W_{(P,f)}(s, \boldsymbol{y}_{(P,f)})=\boldsymbol{a}\cos(\omega_{(P,f)}s-\langle \boldsymbol{k}_{(P,f)} \mid \boldsymbol{y}_{(P,f)}\rangle_S)$$

とするとき，

$$\omega_{(O,e)}ct-\langle \boldsymbol{k}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{y}_{(O,e)}\rangle_S=\omega_{(P,f)}cs-\langle \boldsymbol{k}_{(P,f)} \mid \boldsymbol{y}_{(P,f)}\rangle_S$$

が成り立つ．したがって

（iii）　$\boldsymbol{x}=(x_0, \boldsymbol{x}_{(O,e)})=(ct, x_1, x_2, x_3)$

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{2\pi}(\omega_{(O,e)}, \boldsymbol{k}_{(O,e)})=(\nu_{(O,e)}, \boldsymbol{e}_{(O,e)})$$

と置けば，

$$\begin{aligned}2\pi\langle \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{x}\rangle_M&=-\omega_{(O,e)}ct+\langle \boldsymbol{k}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}(t)\rangle_S\\&=2\pi(-\nu_{(O,e)}ct+\langle \boldsymbol{e}_{(O,e)} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)}(t)\rangle_S)\end{aligned}$$

が不変量である．

証明　（ii）　$W_{(O,e)}(t)=W_{(P,f)}(s)$

とする．このとき，先に述べたように印を付けた波が，位置 $\boldsymbol{y}_{(P,f)}$ から $W_{(P,f)}$ に至る間に数えた波の数が

$$\nu_{(P,f)}s-\langle \boldsymbol{h}_{(P,f)} \mid \boldsymbol{y}_{(P,f)}\rangle_S$$

であるが，それは当然，①に等しい．　（証明終）

Doppler 効果

Newton 宇宙 $(\boldsymbol{E}^N, \boldsymbol{V}^N)=(\boldsymbol{E}^T\times\boldsymbol{E}^S, \boldsymbol{V}^T\oplus\boldsymbol{V}^S)$ において，音速を v とし，音源 P が振動数 ν_0 の音を発しているとする．このとき

（i）　観測者 O は静止し，

(イ)　音源 P が速さ V で O に近づくとき，O が聞く音の振動数 ν は

$$\nu = \nu_0 \frac{v}{v - V}$$

(ロ)　音源 P が速さ V で O から遠ざかるとき，O が聞く音の振動数 ν は

$$\nu = \nu_0 \frac{v}{v + V}$$

(ii)　音源 P が静止し，

(イ)　観測者 O が速さ V で O に近づくとき，O が聞く音の振動数 ν は

$$\nu = \nu_0 \frac{v + V}{v}$$

(ロ)　観測者 O が速さ V で O から遠ざかるとき，O が聞く音の振動数 ν は

$$\nu = \nu_0 \frac{v - V}{v}$$

である．

音の場合と異なり，真空中の光を考えるときには，空気のような媒質がないから，波源が運動しているか，観測者が運動しているかの区別はなく，唯両者の相対速度のみにより，Doppler 効果が定まる．

命題 (4.3.6) (相対論的 Doppler 効果)　Einstein 空間 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{V}^{(3,1)})$ において，二つの慣性系 $(O, \boldsymbol{e})$, $(O, \boldsymbol{f})$ を考える．

$$(\theta, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1) \in \Gamma_e(\boldsymbol{f}), \qquad T = \mathrm{tgh}\,\theta$$

$$W = \boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Rf} = \boldsymbol{Re} + \boldsymbol{Re}_1 = \boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Rf}_1$$

$$(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathcal{U}_{W\perp}$$

$$\therefore \quad (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1) H(\theta)$$

とする．すなわち $(O, \boldsymbol{f})$ は $(O, \boldsymbol{e})$ から見て定速度 $cT\boldsymbol{e}_1$ で移動するとする．

いま光源が慣性系 $(O, \boldsymbol{f})$ に固定され，振動数 $\nu_0 = \nu_{(O,f)}$ の光を出すとする．この光を観測者 $(O, \boldsymbol{e})$ から見たときの振動数を $\nu = \nu_{(O,e)}$，進行方向を単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ とする．このとき

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - T^2}}{1 - T\langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle_S}$$

が成り立つ．

証明　平面波が $(O, \boldsymbol{e})$ において，

$$\text{角振動数 } \omega = 2\pi\nu, \quad \text{波数ベクトル } \boldsymbol{k} = \|\boldsymbol{k}\|_S \boldsymbol{u} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{u}$$

$(O, \boldsymbol{f})$ において，単位ベクトル $\boldsymbol{u}_0 \in V^S(\boldsymbol{f})$ の方向へ

$$\text{角振動数 } \omega_0 = 2\pi\nu_0, \quad \text{波数ベクトル } \boldsymbol{k}_0 = \|\boldsymbol{k}_0\|_S \boldsymbol{u}_0 = \frac{\omega_0}{c}\boldsymbol{u}_0$$

とする．原点 O における位相が 0 であるとすれば，

$$\boldsymbol{e}_{(O,e)}(t) = \boldsymbol{a}\cos(\omega t - \langle \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{x}_{(O,e)} \rangle_S)$$
$$\boldsymbol{e}_{(O,f)}(s) = \boldsymbol{a}_0\cos(\omega_0 s - \langle \boldsymbol{k}_0 \mid \boldsymbol{y}_{(O,f)} \rangle_S)$$

と表される．位相は慣性系によらないから，

$$\omega t - \langle \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{x} \rangle_S = \omega_0 s - \langle \boldsymbol{k}_0 \mid \boldsymbol{y}_{(O,f)} \rangle_S$$

「一般に，事象 W に対し

$$\begin{aligned} W = W_{(O,ce)}(t) &= O + ct\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{(O,e)}(t) \\ &= O + ct\boldsymbol{e} + x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \\ &= X_{(O,cf)}(s) = O + cs\boldsymbol{f} + \boldsymbol{y}_{(O,f)}(s) \\ &= O + cs\boldsymbol{f} + y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{bmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(\theta) & O \\ O & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cs \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\operatorname{csh}\theta)cs + (\operatorname{snh}\theta)y_1 \\ (\operatorname{snh}\theta)cs + (\operatorname{csh}\theta)y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

である．」そこで

$$\boldsymbol{k} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{k}_0 = k_{01}\boldsymbol{f}_1 + k_{02}\boldsymbol{e}_2 + k_{03}\boldsymbol{e}_3$$

とすれば，

$$\omega_0 s - \langle \boldsymbol{k}_0 \mid \boldsymbol{y}_{(O,f)} \rangle_S = \omega t - \langle \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{x} \rangle_S$$

$$\begin{aligned} \omega_0 s - k_{01}y_1 - k_{02}y_2 - k_{03}y_3 &= \omega t - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 \\ &= \omega\left\{(\operatorname{csh}\theta)s + (\operatorname{snh}\theta)\frac{y_1}{c}\right\} \\ &\quad - k_1\{(\operatorname{snh}\theta)cs + (\operatorname{csh}\theta)y_1\} - k_2y_2 - k_3y_3 \\ &= \{\omega(\operatorname{csh}\theta) - k_1c(\operatorname{snh}\theta)\}s \end{aligned}$$

$$+\left\{\frac{\omega}{c}(\mathrm{snh}\ \theta)-k_1(\mathrm{csh}\ \theta)\right\}y_1-k_2y_2-k_3y_3$$

が成り立つ．変数 s の係数を比較することにより，

$$\begin{aligned}\omega_0&=\omega(\mathrm{csh}\ \theta)-k_1c(\mathrm{snh}\ \theta)\\&=\omega(\mathrm{csh}\ \theta)-\langle \boldsymbol{k}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S c(\mathrm{snh}\ \theta)\\&=\frac{\omega-\frac{\omega}{c}\langle \boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S cT}{\sqrt{1-T^2}}\\&=\omega\frac{1-\langle \boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S T}{\sqrt{1-T^2}}\end{aligned}$$

を得る．ここで $\omega_0=2\pi\nu_0$，$\omega=2\pi\nu$ に注意すると，

$$\nu_0=\nu\frac{1-\langle \boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S T}{\sqrt{1-T^2}}$$

を得る．ν について解けば，

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-T^2}}{1-\langle \boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S T}$$

（証明終）

特に

系（4. 3. 7）（ i ）　**縦 Doppler 効果**

(イ)　$\langle \boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S=-1$，すなわち光源が観測者 $(O, \boldsymbol{e})$ から見て，波と反対方向に進む場合：

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-T^2}}{1+T}=\nu_0\sqrt{\frac{1-T}{1+T}}<\nu_0$$

この場合を**赤方偏移**という．

(ロ)　$\langle \boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S=1$，すなわち光源が観測者 $(O, \boldsymbol{e})$ から見て，波と同じ方向に進む場合：

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-T^2}}{1-T}=\nu_0\sqrt{\frac{1+T}{1-T}}>\nu_0$$

この場合を**青方偏移**という．

（ ii ）　**横 Doppler 効果**

$\langle \boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{e}_1\rangle_S=0$，すなわち光源が観測者 $(O, \boldsymbol{e})$ から見て，波と直角をなす方向に進む場合：

$$\nu=\nu_0\sqrt{1-T^2}<\nu_0$$

この効果は非相対論的Doppler効果では現れないものである．これはまた，Lorentzによる時間の伸び(4.3.3)によっても説明できる．すなわち$(O, \boldsymbol{e})$における慣性時刻をt，位置$O\in X$を基準とする固有時刻τとするとき，

$$\frac{dt}{d\tau}=\gamma_{(O,e)}=\frac{1}{\sqrt{1-T^2}}$$

が成り立つ．光源が$\Delta\tau=\tau-\tau_1$の間に送り出す光波の数を$\Delta n=n-n_1$とすれば，

$$\frac{\Delta n}{\Delta\tau}=\frac{n-n_1}{\tau-\tau_1}=\nu_0, \qquad \nu_0=\frac{dn}{d\tau}$$

$$\frac{\Delta n}{\Delta t}=\frac{n-n_1}{t-t_1}=\nu, \qquad \nu=\frac{dn}{dt}=\frac{dn}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\nu_0\sqrt{1-T^2}$$

実験例（4.3.8）　ミューオン（μ中間子）は宇宙線と空気の相互作用により発生する．その平均寿命は静止系において$\tau=2.20\times10^{-6}$秒であって，Newton力学によれば，この時間では光速$c=3.00\times10^8$メートル/秒で走っても$c\tau=6.60\times10^2=660$メートルしか走れないはずである．しかし実際には地上10キロメートルという遙か上空で生じたミューオンが地上で観測される．その理由はつぎの通りである．

いまミューオンが地上という慣性系$(O, \boldsymbol{e})$に対し速さ$\|\boldsymbol{v}\|_S=0.999c$メートルの定速度運動をすると仮定すると，$(O, \boldsymbol{e})$におけるミューオンの固有時刻は慣性時刻と等しく，その寿命は

$$t=\gamma_{(O,e)}(\boldsymbol{v})\tau+(\text{定数})$$

である（2.6.2）．ミューオンが発生した時の固有時刻と慣性時刻をともに0とすれば，

$$t=\gamma_{(O,e)}(\boldsymbol{v})\tau$$

となる．ところで

$$\gamma_{(O,e)}(\boldsymbol{v}/c)=\frac{1}{\sqrt{1-(\|\boldsymbol{v}\|_S/c)^2}}=\frac{1000}{\sqrt{1000^2-999^2}}$$
$$=\frac{1000\sqrt{1999}}{1999}=22.7$$

であるから，その間の飛行距離は

$$t\|\boldsymbol{v}\|_S=\gamma_{(O,e)}(\boldsymbol{v})c\tau=22.7\times(6.60\times10^2)\text{ メートル}$$
$$=15\text{ キロメートル}$$

に達し，ミューオンは地上に到達し得ることになる．

参　考　文　献

［1］ Arima・Asaeda: On some Points in Vector Analysis, *Proc. Japan Acad.* 63, 1987

［2］ 有馬哲・浅枝陽：微積分入門，東京図書，1980

［3］ 有馬哲：線型代数入門，東京図書，1974

［4］ 有馬哲・浅枝陽・(彌永昌吉序)：ベクトル場と電磁場，東京図書，1987

［5］ 有馬哲・日高文夫・石上嘉康・米田元・城一明：アフィン空間上のベクトル場と特殊相対性理論，東京図書，近刊

［6］ 江沢洋：現代物理学，放送大学教育振興会，1988

［7］ W. Greub: Multilinear Algebra, Springer Verlag, 1987

［8］ 砂川重信：理論電磁気学，紀伊國屋書店，1973

［9］ 田村二郎：空間と時間の数学，岩波書店，1977

［10］ 中野董夫：相対性理論，岩波書店，1984

［11］ 平川浩正：相対論〔第2版〕，共立出版，1986

［12］ S. Parrott: Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry, Springer-Verlag, 1987

［13］ 前原昭二：線形代数と特殊相対論，日本評論社，1981

［14］ C. Møller: The Theory of Relativity, Oxford University Press, 1953
(永田恒夫・伊藤大介訳：相対性理論，みすず書房，1959)

［15］ 横沼健雄：テンソル空間と外積代数，岩波書店，1977

［16］ G. Yoneda, Y. Ishigami, S. Arima; Some Asymptotic Conditions of Worldlines in Minkowski Space, Journal of Physical Society of Japan Vol. 62, No. 5, 1993.

［17］ H. Weyl: Raum・Zeit・Materie, 第5版，Springer, 1933
(内山龍雄訳：空間・時間・物質，講談社，1973)
(菅原正夫訳：空間・時間・物質，東海大学出版部，1973)

索　引

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ，ワ　行

記号索引

著者紹介

有馬　哲（ありま　さとし）
1927年　長崎市生まれ
1953年　東京大学理学部化学科卒業
1955年　東京大学理学部数学科卒業
現　在　早稲田大学理工学部教授

浅枝　陽（あさえだ　よう）
1925年　大連市生まれ
1960年　東京大学理学部数学科卒業
現　在　学習院大学理学部教授

日高文夫（ひだかふみお）
1950年　東京都生まれ
1972年　早稲田大学理工学部数学科卒業
現　在　専修大学北海道短期大学助教授

米田　元（よねだ　げん）
1965年　東京都生まれ
1991年　早稲田大学大学院理工学研究科修士課程修了
現　在　同博士課程在学中
学習院高等科講師

城　一明（じょう　かずあき）
1946年　東京都生まれ
1991年　早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了
現　在　茨城県取手医歯系予備校紫峰館講師

ミンコフスキー空間と特殊相対性

1993年10月25日　第1刷発行　　　　Printed in Japan

著　者　有　馬　　哲 ほか

発行所　**東京図書株式会社**

〒112　東京都文京区水道 2—5—22
振替東京4-13803　電話03(3814)7818—9

IBSN4-489-00417-6

人文科学系 大学院案内 宮崎孝一監修

社会科学系 大学院案内 千種義人監修

理学工学系 大学院案内 有馬朗人監修

農学薬学系 大学院案内 逸見謙三 野島庄七 監修

医学歯学系 大学院案内 高久史麿監修

東京図書